

На правах рукописи



ЕРЕМИН МИХАИЛ ОЛЕГОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИРОДНЫХ И
ИСКУССТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ И СРЕД**

1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор **Макаров Павел Васильевич**

Официальные оппоненты:

Лавриков Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, заместитель директора по научной работе.

Плехов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, директор.

Сибиряков Егор Борисович – доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук, старший научный сотрудник.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта

Защита диссертации состоится «6» октября 2023 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета 24.1.135.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (ИФПМ СО РАН) по адресу: 634055, пр. Академический 2/4; e-mail: ovs@ispms.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФПМ СО РАН и на официальном сайте ИФПМ СО РАН <http://www.ispms.ru>

Автореферат разослан « ___ »

2023 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор технических наук, профессор



Сизова О.В

Общая характеристика работы

Актуальность. Хорошо известно, что в зависимости от внешних условий (давление, температура, тектонические напряжения, наличие флюида, структурные особенности), поведение природных материалов может быть хрупким, квазихрупким или псевдо-пластическим. Многообразие факторов обуславливает необходимость дальнейшего развития модельных представлений о процессах деформации и разрушения природных материалов и сред с целью прогноза их механического поведения в сложных условиях нагружения.

Развитие направления мезомеханики многоуровневых сред со структурой за последние 30 лет привело к проникновению методов, разработанных в рамках физической мезомеханики металлов и сплавов в ИФПМ СО РАН, в область исследования механического поведения других материалов, например, керамических композиционных материалов, а также природных и искусственных материалов. Исследование влияния мезоскопических особенностей структуры на механические свойства и поведение под приложенными воздействиями является одним из ключевых направлений механики природных материалов и сред, о чем свидетельствует рост публикационной активности по данному направлению. Особенно актуальным выбранное направление исследований является в связи с необходимостью разработки и совершенствования методов извлечения полезных ископаемых, а также средств защиты от динамических явлений при отработке месторождений полезных ископаемых, таких как горные удары, взрывы газа и т.д.

Эксперименты по физическому моделированию процесса отработки месторождения и шахтные эксперименты являются дорогостоящими и требуют значительных временных затрат. Современные методы математического моделирования механики деформируемого твердого тела, в приложении к задачам механики природных материалов, напротив, лишены перечисленных недостатков. За счет бурного развития высокопроизводительной вычислительной техники, методы математического моделирования позволяют исследовать процессы деформации и разрушения твердых тел и сред в трехмерной постановке с достаточно высокой детализацией как структурных элементов, так и учета физических процессов трения, дилатансии и накопления неупругих деформаций и повреждений, контролирующих прочность тел и сред.

С фундаментальной точки зрения, актуальность выбранной темы исследования обусловлена необходимостью дальнейшего развития теории формирования очагов разрушения в твердых телах и средах как процесса эволюции напряженно-деформированного состояния (далее НДС), при различных видах нагружения. Исследование длительной стадии подготовки макроскопического разрушения в твердых телах и средах классическими методами предельного проектирования затруднено, поскольку разрушение рассматривается как мгновенный акт. Другими словами, выявить характерные черты эволюции твердого тела к критическому состоянию такой подход не способен. Современные представления основаны на том, что разрушение является следствием многомасштабного процесса накопления неупругих деформаций и повреждений и соответствующей деградации физико-механических свойств твердого тела или среды под приложенными воздействиями. Такой подход является перспективным с точки зрения выявления характерных закономерностей формирования очагов разрушения – а именно, индикаторов перехода от длительной стадии подготовки очага к заключительной стадии эволюции НДС.

Таким образом, разработка новых и модификация ранее предложенных математических моделей механического поведения природных и искусственных

материалов, учитывающих закономерности процесса накопления неупругих деформаций и повреждений, и соответствующей деградации свойств при различных видах нагружения, является одной из самых **актуальных задач** механики деформируемого твердого тела.

Степень разработанности темы исследования. Развитию модельных представлений для описания процессов деформации и разрушения нагружаемых природных материалов и сред только в России посвящены работы Протоdjяконова М.М., Христиановича С.А., Коваленко Ю.Ф., Салганика Р.Л., Баренблатта Г.И., Шемякина Е.И., Опарина В.Н., Садовского М.А., Садовского В.М., Николаевского В.Н., Гарагаша И.А., Добровольского И.П., Ребецкого Ю.Л., Рогожина Е.А., Турунтаева С.Б., Стефанова Ю.П., Сибирякова Б.П., Сибирякова Е.Б., Псахье С.Г., Шилько Е.В., Захарова В.Н., Козырева А.А., Наймарка О.Б., Макарова П.В., Рассказова И.Ю., Макарова В.В., Смолина И.Ю., Петрова Ю.В., Чанышева А.И., Одинцева В.Е., Назарова А.А., Дядькова П.Г., Ревуженко А.Ф., Лаврикова С.В., Коробейникова С.Н., Полянского О.П., Клишина В.И., Яковлева В.Л., Сукнева С.В., Карпова Е.В., Богомолова Л.М., Фрянова В.Н. и Павловой Л.Д., Шермана С.И., Семинского К.Ж., Ружича В.В., Гогоненкова Г.Н., Тимурзиева А.И., Немировича-Данченко М.М. и многих других.

Однако стоит отметить, что, согласно проведенному литературному обзору, количество работ, в которых на основе математического моделирования исследуется стадийность процесса деформации и разрушения лабораторных образцов природных и искусственных материалов, сравнительно невелико. Ценность подобных исследований заключается в наличии ряда общих закономерностей механического поведения лабораторных образцов природных и искусственных материалов при одноосном сжатии с охранными целиками, обеспечивающими сохранение эксплуатационных свойств подготовительных выработок при подземной отработке месторождений полезных ископаемых. Также, согласно проведенному литературному обзору, существует широкий класс задач, требующих решения при разработке месторождений полезных ископаемых подземным способом. Стоит отметить, что количество работ, посвященных исследованию процессов деформации и разрушения природных материалов при подземной отработке месторождений полезных ископаемых, представленных наклонными пластами, на основе данных математического моделирования сравнительно невелико. Таким образом, тема исследования требует дальнейшей разработки.

Целью работы является разработка математической модели процессов деформации и разрушения природных и искусственных материалов, их эволюции к критическому состоянию, с учетом структурных особенностей, законов накопления повреждений и деградации физико-механических свойств.

В работе были поставлены и решены следующие **задачи**.

1. Разработать алгоритмы математического моделирования эволюции НДС к критическому состоянию нагружаемых твердых тел и сред, а также алгоритмы обработки и интерпретации результатов численного моделирования, выполнить расчеты эволюции НДС природных и искусственных материалов и сред при различных видах нагружения.

2. Проанализировать статистические данные о влиянии пористости на физико-механические свойства, построить структурные модели природных материалов на примере песчаников Кузнецкого бассейна, а также искусственных материалов, и исследовать влияние пористости на стадийность процессов деформации и разрушения при одноосном сжатии модельных образцов.

3. Построить структурные модели природной среды на примере данных о строении осадочного чехла Кузнецкого бассейна и исследовать влияние строения на

закономерности процессов деформации и разрушения природных материалов и их обрушения при отработке подземного месторождения.

4. Исследовать влияние геометрии охранных целиков и их уникальной истории нагружения на коэффициент запаса прочности при отработке смежных выемочных столбов наклонного пласта полезного ископаемого на примере угольного пласта.

5. Методами математической статистики исследовать закономерности формирования критических состояний в природных материалах и средах на основе анализа данных математического моделирования.

6. Проанализировать результаты моделирования с целью выработки рекомендаций для принятия инженерных решений по обеспечению геодинамической безопасности ведения горных работ при добыче полезных ископаемых подземным способом.

Научная новизна. Новыми являются следующие результаты диссертационного исследования:

1. Получены новые выражения для определения параметров модифицированного уравнения Друкера-Прагера для отрицательной и положительной областей пространства напряжений «интенсивность напряжений – гидростатическое давление».

2. В кинетическом уравнении для скалярного параметра закона накопления повреждений предложено использовать относительное кулоновское напряжение в качестве эффективного напряжения.

3. Предложена методика определения пороговых напряжений, характеризующих стадийность процессов деформации и разрушения природных и искусственных материалов в условиях одноосного сжатия, основанная на анализе закономерностей развития поврежденности и индуцированной акустической эмиссии, полученных в результате численного моделирования.

4. Предложена методика определения шагов обрушения массива природных материалов над выработанным пространством, количественно согласующихся с результатами натурных измерений, с использованием данных о строении конкретных месторождений. Методика основана на анализе распределения накопленных повреждений в кровле, рассчитанных с помощью численного моделирования продвижения выработки.

5. Предложена новая модификация классической формулы по оценке устойчивости охранных целиков на случай обобщенного напряженного состояния при подземной отработке наклонных угольных пластов длинными очистными забоями, учитывающая влияние касательных напряжений.

6. На основе обработки результатов численного моделирования методами математической статистики установлено, что при приближении модельной среды к критическому состоянию (при котором возможно обрушение кровли), происходит уменьшение наклона амплитудно-частотной характеристики колебаний напряженного состояния во вмещающих природных материалах, что связано с развитием разрушения на различных масштабах (во всей иерархии).

Теоретическая значимость работы заключается в формулировке новых и модификации существующих математических моделей механики деформируемого твердого тела и численных подходов для описания процессов деформации и разрушения природных и искусственных материалов и сред.

На основе разработанных моделей и выполненных модификаций численных методик получены новые результаты механического поведения природных материалов и сред в поле приложенных воздействий. Численно исследовано влияние структуры

порового пространства на процессы деформации и разрушения природных и искусственных материалов на примере песчаников Кузнецкого бассейна и образцов цементно-песчаной смеси, в том числе закономерности развития поврежденности и индуцированной акустической эмиссии.

Для оценки минимальной геометрии охранных целиков, обеспечивающей соблюдение критерия устойчивости, получено новое выражение для расчета устойчивости, учитывающее влияние касательных напряжений и уникальную историю нагружения целиков наклонных угольных пластов.

Разработанные математические модели и полученные результаты моделирования способствуют более углубленному теоретическому пониманию законов развития поврежденности как в нагруженных лабораторных образцах природных и искусственных материалов, так и в массивах природных материалов в процессе отработки месторождений подземным способом, а также закономерностей обрушений кровли над выработанным пространством.

Практическая значимость работы. Основными факторами возникновения аварийных ситуаций в горной выработке являются интенсификация добычи, а также сложные горно-геологические условия. В совокупности эти факторы могут приводить к нарушению геодинамической безопасности ведения горных работ с возможными летальными исходами среди персонала предприятий угольной промышленности. Предотвращение аварийных ситуаций в горной выработке при интенсивной отработке месторождений полезных ископаемых невозможно без понимания фундаментальных закономерностей механического поведения природных материалов и сред при различных, в том числе сложных, видах нагружения.

Таким образом, практическая значимость решенных задач заключается в возможности применения разработанного пакета программ и разработанной модели среды со структурой для оценок шагов обрушения кровли над выработанным пространством для конкретных месторождений полезных ископаемых, расчета устойчивости охранных целиков, а также определения пороговых напряжений при деформации природных материалов. Разработанная методика оценки эволюции НДС модельного массива природных материалов к критическому состоянию на основе анализа АЧХ и PDF-зависимостей колебаний напряжений может быть использована на месторождениях в рамках геодинамического мониторинга состояния реального горного массива, в системах раннего оповещения с целью повышения геодинамической безопасности ведения горных работ.

Методология и методы исследований. Для решения поставленных задач в диссертационной работе применены методы и подходы теории упругости и пластичности, континуальной механики накопления повреждений. Для обработки результатов моделирования применены отдельные методы математической статистики, а также методы теории нелинейных динамических систем. Весь объем численного эксперимента выполнен с использованием двумерного и трехмерного конечно-разностных методов Уилкинса, трехмерного конечно-элементного метода Джонсона.

Положения, выносимые на защиту.

1. Разработанная математическая модель упруго-хрупко-пластической повреждаемой среды, учитывающая нелинейный характер перехода среды в неупругое состояние и развитие поврежденности, в том числе в режиме с обострением на заключительных этапах процесса деформации.

2. Методика выделения стадий процесса деформации и разрушения природных и искусственных материалов и соответствующих им пороговых напряжений при

одноосном сжатии на основе анализа закономерностей развития поврежденности, индуцированной акустической эмиссии и полных диаграмм деформирования.

3. Методика определения шагов естественного обрушения массива природных материалов над выработкой с явным учетом структуры конкретного месторождения, основанная на анализе распределения накопленных повреждений в кровле, рассчитанных с помощью численного моделирования продвижения выработки.

4. Модификация базового выражения для определения коэффициента запаса прочности для наклонных угольных пластов с учетом влияния касательных напряжений, которое позволяет оценить устойчивость охранных целиков наклонных пластов и минимальную необходимую геометрию целика, обеспечивающую соблюдение базового критерия безопасности ведения горных работ.

5. Совокупность результатов, подтверждающих, что уменьшение наклона амплитудно-частотной характеристики колебаний напряженного состояния в кровле пласта является одной из ключевых закономерностей эволюции НДС массива природных материалов к критическому состоянию, при котором возможно обрушение кровли) при отработке подземного месторождения.

Степень достоверности результатов подтверждается серией проведенных тестовых расчетов, верификацией и валидацией разработанных моделей по данным экспериментальных исследований и литературных данных, корректностью физической и математической постановки задачи, использованием проверенных численных методов.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались более чем на 25 конференциях и семинарах различного уровня, наиболее значимыми из которых за последние 5 лет являются: Триггерные эффекты в геосистемах 2022, Москва, ИДГ РАН, 21-24 июня 2022; XI всероссийская научная конференция Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики, посвященная 60-летию ФТФ ТГУ, 13-17 апреля 2022; 4th International Conference on Structural Integrity and Durability Fatigue and Fracture – Theory and Applications, September 15-18, 2020, Dubrovnik, Croatia; The Sixteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, 16-19 September 2019, Riva del Garda, Italy; INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED MATERIALS WITH HIERARCHICAL STRUCTURE FOR NEW TECHNOLOGIES AND RELIABLE STRUCTURES 2019. 1-5 October 2019, Tomsk, Russia; The Fifth International Conference "Trigger Effects in Geosystems 4-7 June 2019, Moscow, Russia; 25th International Conference on Fracture and Structural Integrity. 12-14 June 2019, Catania, Italy; 3rd International Conference on Structural Integrity and Durability. Fatigue, Fracture and Failure, 4-7 June 2019, Dubrovnik, Croatia; 4th China-Europe Conference on Geotechnical Engineering. 13-16 August 2018, Vienna, Austria; XII Международная конференция Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций, Екатеринбург, 21-25 мая 2018 г; Международная конференция Перспективные материалы с иерархической структурой для новых технологий и надежных конструкций и Химия нефти и газа в рамках Международного симпозиума Иерархические материалы: разработка и приложения для новых технологий и надежных конструкций“, 1-5 октября 2018 года, Томск, Россия; Международная конференция Перспективные материалы с иерархической структурой для новых технологий и надежных конструкций, Томск, Россия, 9-13 октября 2017 г.

Соответствие диссертации паспорту специальности. Диссертация по своим целям, задачам, содержанию, методам исследования и научной новизне соответствует п. 1 «Законы деформирования, повреждения и разрушения материалов, в том числе природных, искусственных и вновь создаваемых.», п. 9 «Устойчивость процессов

деформирования», п. 11 «Математическое моделирование поведения дискретных и континуальных деформируемых сред при механических, тепловых, электромагнитных, химических, гравитационных, радиационных и прочих воздействиях», п. 12 «Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела» паспорта научной специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения, приложения и списка литературы. Работа изложена на 206 страницах, в том числе содержит 92 иллюстрации, 10 таблиц, список цитированной литературы представлен 296 источниками.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведено обоснование актуальности выбора и описана степень разработанности темы исследования, определены цель и задачи исследования, приведены положения, выносимые на защиту, сформулирована научная новизна исследования, его теоретическая и практическая значимость, обсуждены методы исследования, степень достоверности, апробация работы, сведения об опубликованных работах, выполненных проектах, структуре и объеме диссертации.

В первом разделе работы приведен литературный обзор по современному состоянию исследований в рамках выбранного направления. Обсуждены результаты исследований материалов, содержащих начальные дефекты как естественного, так и искусственного происхождения; выбраны подходы к оценке пороговых напряжений и стадийности процесса деформации природных материалов. Обсуждены научные проблемы и технические решения, связанные с подземной разработкой месторождений полезных ископаемых.

Природные материалы имеют достаточно сложный химический состав и структуру, что усложняет выделение факторов, влияющих на величины пороговых напряжений. В связи с этим образцы для подобных экспериментов подбираются тщательным образом и по возможности должны быть однородными, насколько это возможно в случае с природными материалами. Альтернативой служат искусственные материалы, которые обладают необходимой однородностью и используются для калибровки математических моделей по экспериментальным данным.

В диссертационной работе основное внимание уделено двум задачам - оценке шагов обрушения кровли над выработанным пространством пологопадающих пластов и оценке устойчивости охранных целиков при отработке смежных выемочных столбов наклонных пластов. Оценки выполнены на основе математического моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния массива природных материалов, содержащего подземную выработку.

Во втором разделе представлена математическая постановка задачи эволюции напряженно-деформированного состояния природных и искусственных материалов и сред в поле приложенных воздействий.

Основой математической модели является полная система уравнений механики деформируемого твердого тела, представленная ниже уравнениями (1-14). В систему входят фундаментальные законы сохранения массы (1), количества движения (2) и геометрические соотношения (3,4).

$$\rho_0 V_0 = \rho V \quad (1) \quad \rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \quad (2) \quad 2\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (3) \quad 2\dot{\omega}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (4)$$

Приращение полных деформаций представляется в виде суммы упругой и неупругой составляющих (5), где индексы Т, Е и Р соответствуют полной, упругой и неупругой. Приращения компонент полного тензора напряжений представляются в виде

суммы шаровой P (6) и девиаторной части S_{ij} (7).

$$d\varepsilon_{ij}^T = d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P \quad (5) \quad \dot{P} = -K\left(\frac{\dot{V}}{V} - \dot{\theta}^P\right) \quad (6) \quad \dot{S}_{ij} + S_{ik}\dot{\omega}_{kj} - S_{kj}\dot{\omega}_{ik} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\dot{V}}{V}\delta_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^P) \quad (7)$$

Применяется коротационная производная Яуманна, чтобы вычесть поворот элемента среды как целого, не влияющего на величину девиаторных напряжений.

Критерий Друкера-Прагера и неассоциированный закон пластического течения

В качестве основы для разрабатываемой математической модели используется модифицированная версия уравнения Друкера-Прагера (ДП) (8). В уравнение ДП дополнительно введена зависимость параметра Y от скалярного параметра поврежденности D .

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, D) = -\alpha P + \sqrt{J_2} - Y \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

Нелинейное неупругое изменение объема континуума при упрочнении обычно приводит к нарушению ассоциированного закона пластического течения. Завышенная оценка дилатансии в случае ассоциированного закона обуславливает использование неассоциированного закона пластического течения с потенциалом (10):

$$g(\sigma_{ij}) = \tau - \Lambda P + const \quad (10)$$

В результате применения неассоциированного закона пластического течения получаются следующие приращения компонентов тензора неупругих деформаций (11):

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda\left(\frac{S_{ij}}{2\tau} + \frac{\Lambda}{3}\delta_{ij}\right), d\theta^P = d\varepsilon_{ii}^P \quad (11)$$

В расчетах происходит деградация когезии по следующему закону:

$$Y = Y_0\left[1 + h\frac{\gamma_p}{\gamma_c} - h\left(\frac{\gamma_p}{\gamma_c}\right)^2\right](1 - D) \quad (12)$$

Накопление повреждений

Для целей настоящей работы использовалась следующая форма кинетического уравнения накопления повреждений:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\sigma_c^2}{t_*}, \quad (13)$$

где $\sigma_c = \tau/(Y + \alpha P)$ – кулоновское напряжение, а t_* – параметр модели, определяющий скорость накопления повреждений и имеющий физический смысл характерного времени инкубации процесса разрушения.

При выполнении критерия разрушения ($D=1$) в конкретной точке материала, начинается закритическое поведение, описание которого также очень важно для моделирования макроскопического отклика материала. В расчетах достижения параметра D единицы трактуется как единичный импульс акустической эмиссии (далее АЭ). В работе используется следующее закритическое поведение в локальной точке:

(а) если гидростатическое давление $P < 0$, то все компоненты тензора напряжений обнуляются;

(б) если гидростатическое давление $P > 0$, то материал в локальной точке продолжает сопротивляться с остаточной прочностью на сдвиг $\tau = \alpha P$.

Валидация параметров модели по экспериментальным данным

Кусочно-линейный вид предельной поверхности с различными наклонами для отрицательного и положительного (связанных со знаком гидростатического давления) полупространств напряжений (ось τ – напряжение фон Мизеса, ось P – гидростатическое

давление) используется в данной работе. На рисунке 1 показана схема предельной поверхности. Значения параметров рассчитываются в соответствии с уравнениями (14), для Y_0 , $\alpha_{2,0}$ приведены два выражения для вписанной и описанной поверхностей, соответственно.

$$\alpha_{1,0} = \sqrt{3} \frac{\sigma_{c0} - \sigma_{t0}}{\sigma_{c0} + \sigma_{t0}}, \alpha_{2,0} = \frac{2\sqrt{3}\sin\phi}{3 - \sin\phi}, Y_0 = \frac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)},$$

$$\alpha_{2,0} = \frac{3\sin\phi}{\sqrt{9 + 3\sin^2\phi}}, Y_0 = \frac{3C\cos\phi}{\sqrt{9 + 3\sin^2\phi}} \quad (14)$$

Возможные истории нагружения на упругой стадии деформации в модели схематически показаны на рис. 1а штрихпунктирными линиями. На рис. 1б схематически показана эволюция предельной поверхности в процессе деформации.

Введенные обозначения:

ρ_0, ρ, V_0, V - начальное и текущее значение плотности материала, соответственно, v_i - компоненты вектора скорости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, F_i - компоненты массовой силы, ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, ω_{ij} - компоненты тензора ротора вектора скорости, x_i - Декартовы координаты, P - давление, S_{ij} - компоненты девиатора тензора напряжений, K, μ - модули объемного сжатия и сдвига, соответственно, θ, θ^P - объемная полная деформация и неупругая часть объемной деформации, ε_{ij}^P - компоненты тензора неупругих деформаций, λ - множитель из основного соотношения теории пластичности, $g(\sigma_{ij})$ - уравнение пластического потенциала, $f(\sigma_{ij})$ - уравнение предельной поверхности, α - коэффициент внутреннего трения, Λ - коэффициент дилатансии, J_2 - второй инвариант девиатора тензора напряжений, $\tau = \sqrt{J_2}$, Y_0, Y - начальное и текущее значение когезии, n_j - компоненты вектора нормали, δ_{ij} - дельта Кронекера, t - время, h - коэффициент деформационного упрочнения, γ_c - критическое значение накопленной интенсивности неупругой деформации, после которой преобладает разупрочнение.

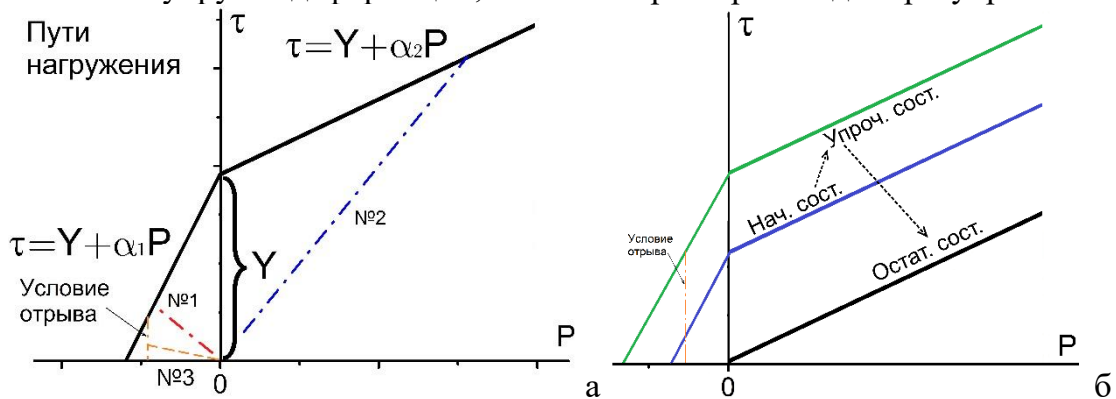


Рисунок 1 – Предельная поверхность и возможные пути нагружения на упругой стадии в точке континуума (а), схема эволюции предельной поверхности в процессе деформации (б).

В третьем разделе работы представлены результаты моделирования одноосного сжатия представительных мезообъемов природных и искусственных материалов.

Сходимость численного решения

В работе сходимость численного решения проверяется по кривой зависимости усредненной компоненты тензора напряжений σ_{zz} по всему объему расчетной области от числа элементов сетки. Рисунок 2 иллюстрирует результаты теста на сходимость. Усредненное напряжение приближается к асимптотическому значению, когда число элементов сетки превышает 20 млн. Поэтому сетка с ≈ 22 млн элементов была выбрана как разумный компромисс между точностью и вычислительными затратами. В таблице 1

представлен набор физико-механических свойств.

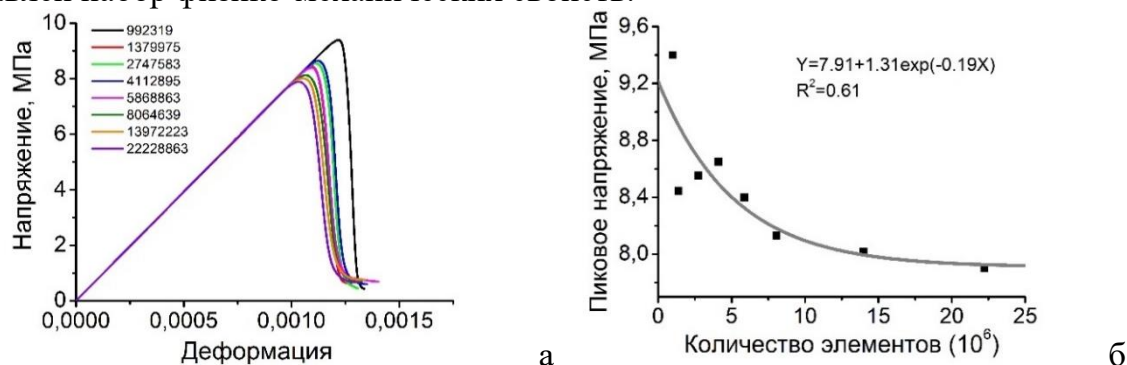


Рисунок 2 – Диаграммы нагружения для модели с различным количеством элементов сетки (а), экспоненциальная аппроксимация значений пикового напряжения (б).

Таблица 1 – Физико-механические свойства материала, использованные в модели.

	ρ_0 , г/см ³	E, ГПа	ν	σ_c , МПа	σ_t , МПа	Y_0 , МПа	α_1	α_2	Λ_1	Λ_2	t^*
Опис. ДП	2.64	8.09	0.2	19.39	3.31	5.27	1.23	0.89	0.1	0.08	10^{-5}
Впис. ДП						3.42	1.22	0.58	0.1	0.05	10^{-5}

Статистические зависимости свойств песчаников Кузнецкого бассейна от пористости

В данном разделе проанализированы данные по более чем 100 образцам песчаников, отобраным на различных месторождениях Кузнецкого угольного бассейна. Если пренебречь всеми факторами, кроме пористости, то для отобранных образцов песчанника получают следующие экспериментальные зависимости (см. рис. 3а-е). Эти данные в дальнейшем используются для валидации параметров модели.

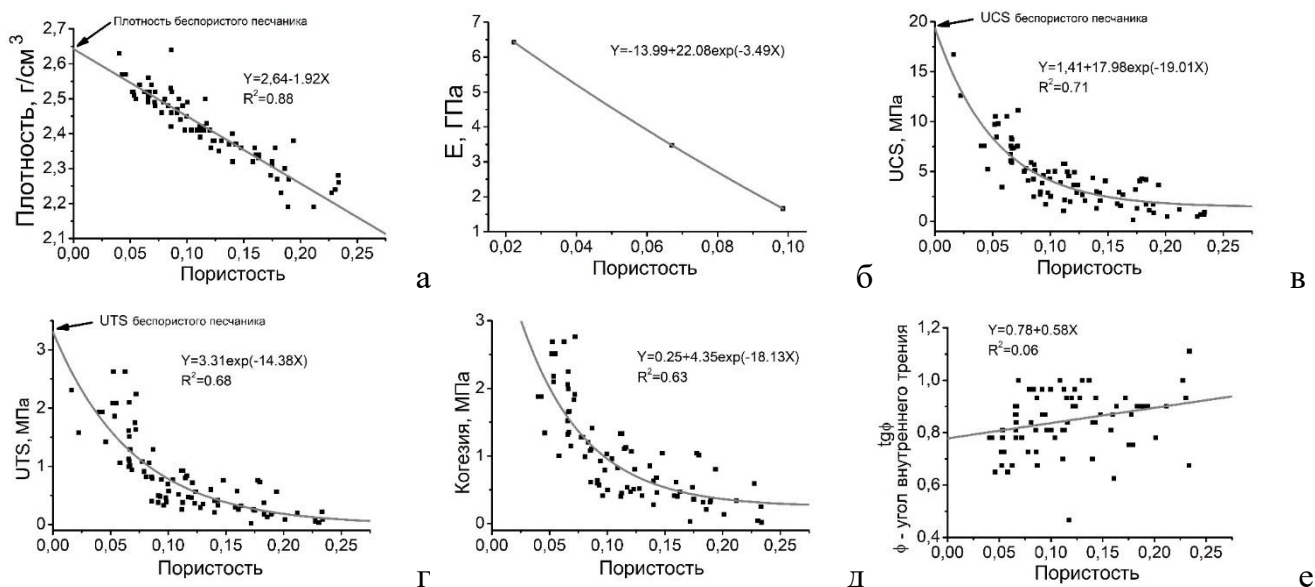


Рисунок 3 – Зависимость плотности (а), модуля Юнга (б), прочности на одноосное сжатие (в), прочности на одноосное растяжение (г), когезии (д), коэффициента внутреннего трения (е) от пористости образцов.

Распределение пор по размерам и модель мезообъема

Дизайн компьютерных моделей образцов с порами неправильной формы является сложной задачей, в связи с чем для простоты сделано предположение о сферической форме пор. Распределение пор в расчетной области проводилось с помощью генератора псевдослучайных чисел по экспериментальному логнормальному закону (серая кривая на

рис. 4а). Общая пористость составляет $\approx 2\%$. Соотношение $w:l:h$ составляет $1:1:2$.

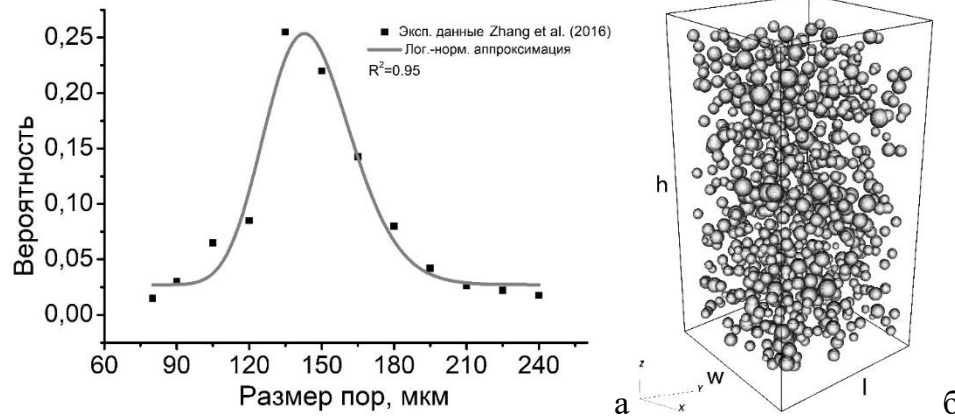


Рисунок 4 – Плотность вероятности распределения пор по размерам (а), компьютерная модель мезообъема образца пористого песчаника с общей пористостью $\approx 2\%$ (б).

Стадии деформации при одноосном сжатии

Состояния (а)-(д) диаграммы нагружения (рис.5) сопоставлены с соответствующими паттернами накопленных повреждений и проиллюстрированы на рис. 6 а-д. В данной работе закрытие микротрещин и микропор не учитывается, и линейная зависимость между усредненным напряжением и инженерной деформацией устанавливается с начала деформации (см. рис. 5).

Следующая стадия деформации связана с зарождением трещин. Начало этой стадии обозначено точкой (а) на рис. 5. Результаты моделирования показывают, что первые импульсы акустической эмиссии наблюдаются при осевом напряжении $\sigma_{ci} \approx 0.27 \sigma_p$, где σ_p - пиковое напряжение. Это отношение удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

На участке (а)-(б), как видно из диаграммы АЭ (рис. 5), количество импульсов достаточно низкое (<10). К моменту, отмеченному точкой (в) на диаграмме, некоторые трещины немного увеличились. Это состояние показано на рис. 6в. Отметим, что докритическая стадия деформации характеризуется зарождением распределенных не взаимодействующих трещин и их незначительным распространением.

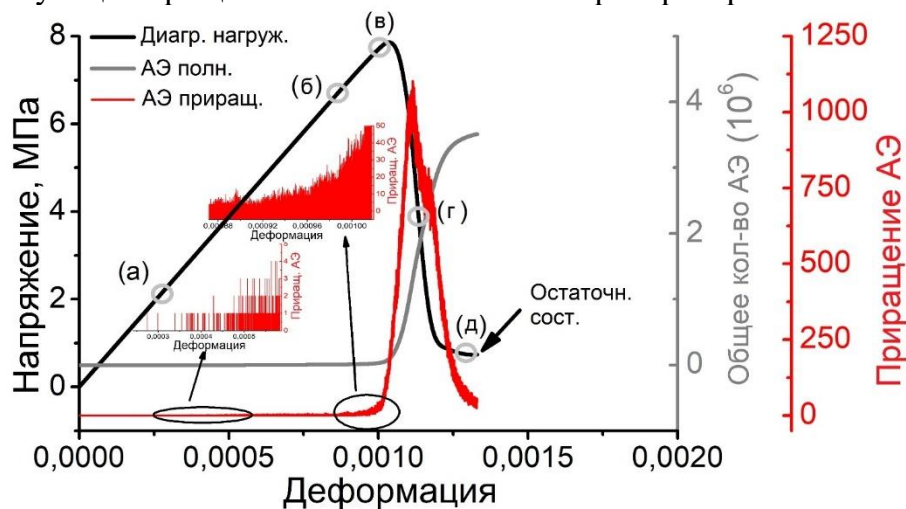


Рисунок 5 – Диаграмма одноосного сжатия мезообъема в условиях свободного скольжения в сочетании с моделируемыми импульсами АЭ.

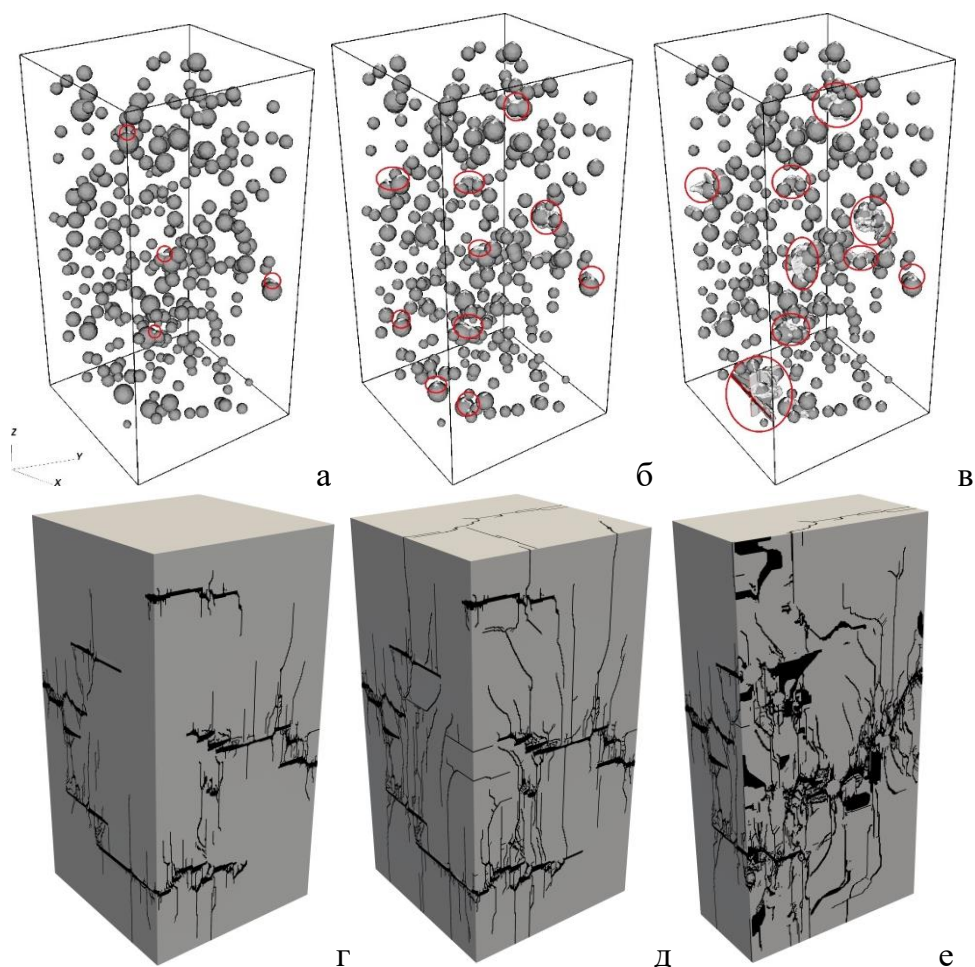


Рисунок 6 – Паттерны накопленных повреждений в объеме материала, относящиеся к соответствующим состояниям (а-в), паттерны накопленных повреждений, наблюдаемые на свободных поверхностях образца (г, д), центральное сечение модели в состоянии (е).

После точки (в) достигается пиковое напряжение и начинается закритическая стадия. Закритическая стадия деформации характеризуется неустойчивым распространением трещин и очень непродолжительна. Скорость роста трещин при этом достаточно высока, что также подтверждается взрывным увеличением числа импульсов АЭ. Однако после состояния в точке (г), количество импульсов АЭ начинает уменьшаться, что свидетельствует о замедлении процесса разрушения и приближении к состоянию с остаточной прочностью (е). Черным цветом отмечены точки материала, в которых параметр $D=1$, что означает выполнение критерия локального разрушения. Судя по результатам, в материале наблюдается смешанный механизм разрушения, поскольку в разрушенном материале присутствуют как трещины отрыва, так и трещины сдвига.

На рис. 7 показана полная диаграмма нагружения мезообъема образца с пористостью $p=8\%$, полученная на примере «описанного» критерия ДП. На рисунке 7а показаны зависимости осевого напряжения от осевой деформации (ε_1), поперечной деформации (ε_3) и объемной деформации ($\varepsilon_v = -\Delta V/V$).

Точка разворота в зависимости $\varepsilon_v(\varepsilon_1)$ характеризуется изменением знака производной и интерпретируется как порог начала неустойчивого трещинообразования (σ_{cd}) по Мартину и Чендлеру. За точкой разворота сразу следует неустойчивая стадия развития трещин. Метод обратной точки для определения начала неустойчивого развития трещин очень удобен для инженерных приложений, так как зависимость объемной деформации от осевой содержит экстремум, хотя полученная величина несколько завышена по сравнению с началом интенсификации импульсов АЭ (рис. 8, увеличенная

вставка). Тот же вывод можно сделать, если мгновенный коэффициент Пуассона ($\mu_{31} = -\varepsilon_3/\varepsilon_1$) представить в виде функции осевой деформации. Однако имеется некоторый волюнтаризм в определении начала интенсификации АЭ и заметного увеличения мгновенного коэффициента Пуассона. Отношения $R_{ci} = \sigma_{ci}/\sigma_p$ для других мезообъемов с различной пористостью и разными предельными поверхностями представлены на рис. 9а. Отношения $R_{cd} = \sigma_{cd}/\sigma_p$ для других мезообъемов с различной пористостью и разными предельными поверхностями представлены на рис. 9б.

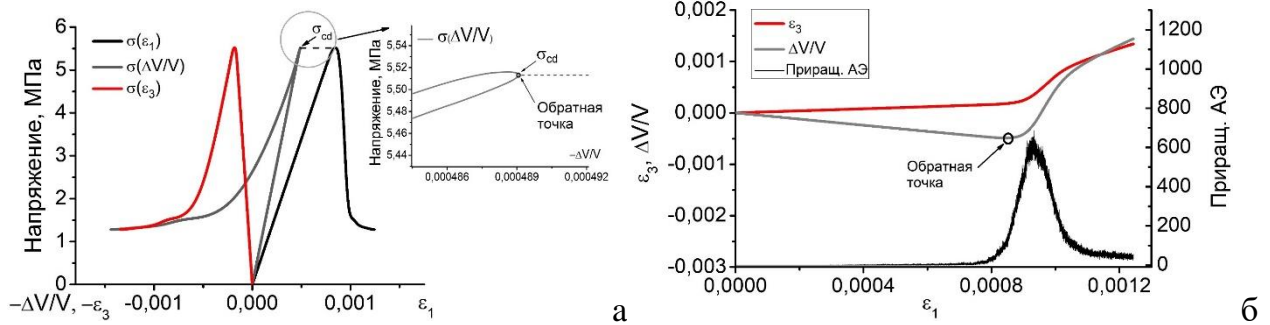


Рисунок 7 – Полная диаграмма деформирования мезообъема образца с пористостью $p=8\%$, полученная с использованием описанного критерия ДП.

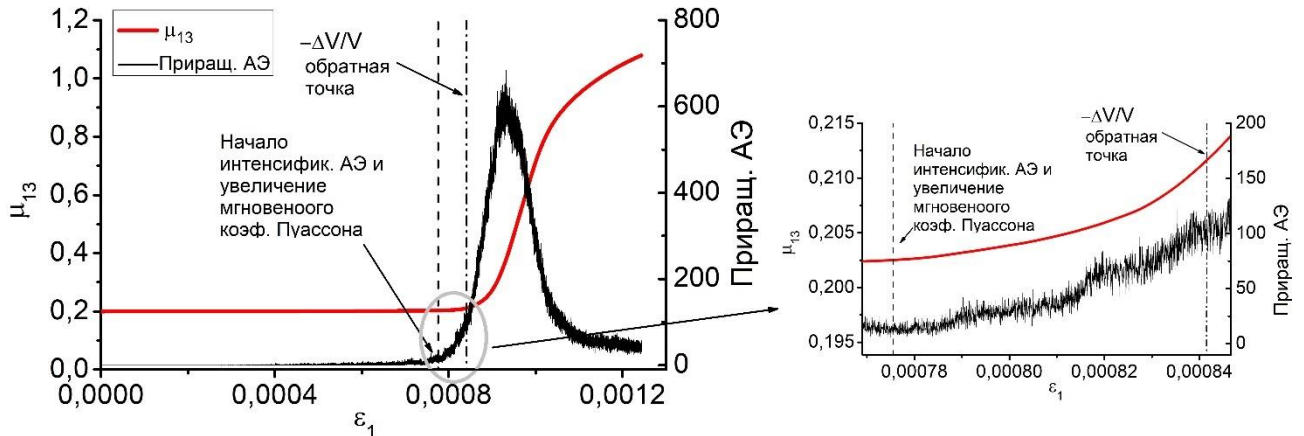


Рисунок 8 – Зависимость мгновенного коэффициента Пуассона от осевой деформации.

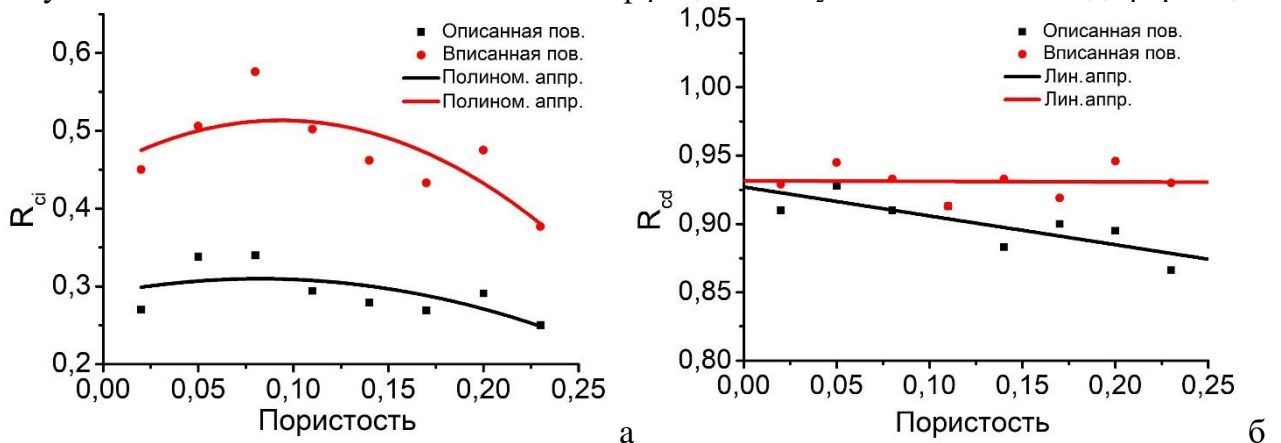


Рисунок 9 – Зависимости R_{ci} и R_{cd} , рассчитанные по методу АЭ для мезообъемов образцов с различной пористостью и разными предельными поверхностями.

Зависимость прочности на сжатие и изменение механизма разрушения от пористости

Механизм разрушения образцов с ростом пористости претерпевает существенные изменения. Например, при пористости более 11% протяженные трещины отрыва начинают формироваться только вблизи свободных поверхностей, а весь объем материала разбит мезомасштабными межпоровыми трещинами, ориентированными под

разными углами к направлению нагружения. В качестве примера результаты, полученные с использованием описанного критерия ДП, проиллюстрированы на рис. 10а-з для образцов с различной пористостью. Изменение доминирующего механизма разрушения с увеличением пористости приводит к нескольким результатам: (а) сглаживанию наклона ниспадающей части диаграммы нагружения (рис. 11), (б) увеличению вязкости и (в) снижению скорости диссипации энергии.

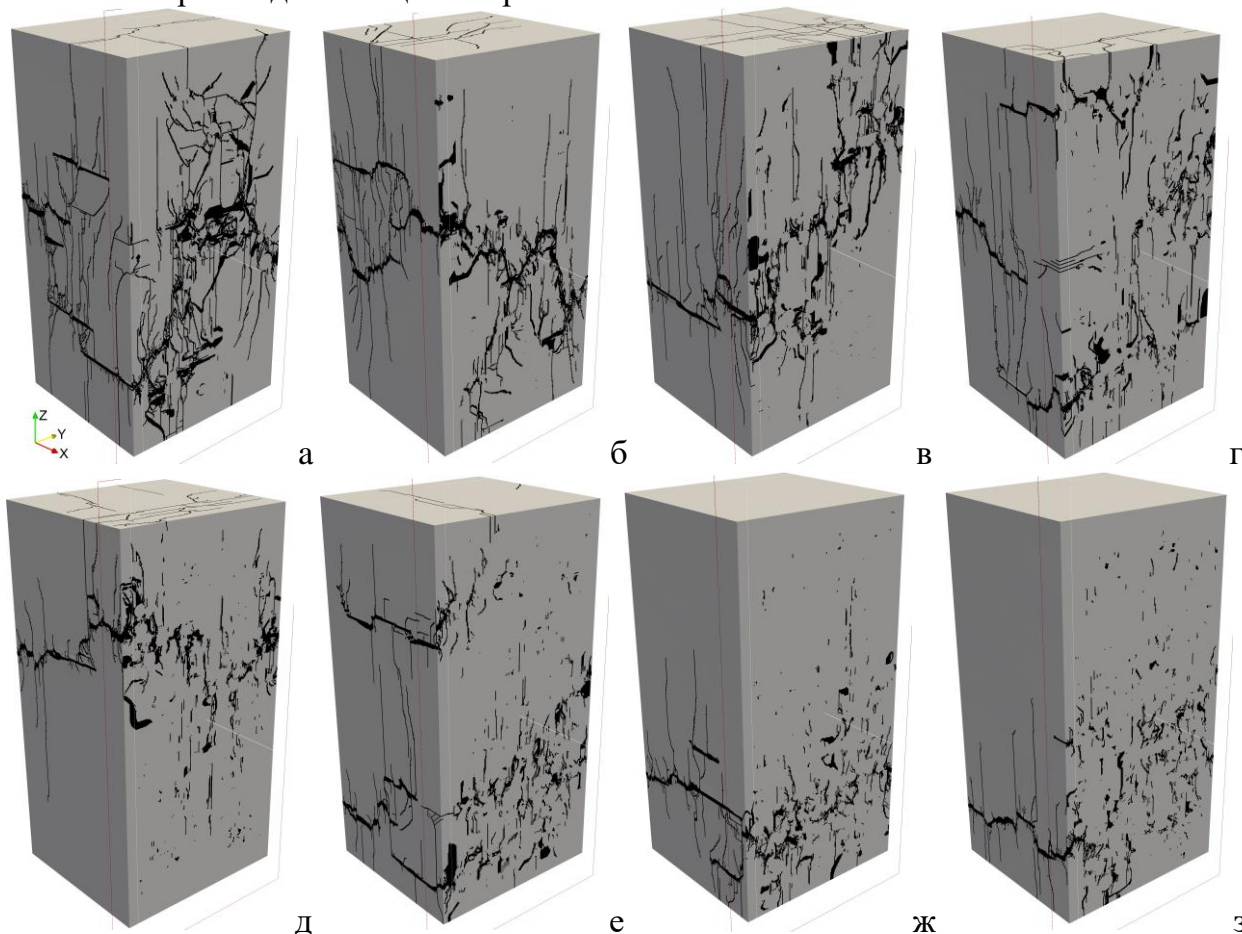


Рисунок 10 – Паттерны накопленных повреждений для мезообъемов с различной пористостью в состоянии с остаточной прочностью; сечение -плоскостью смещено на $0.9w$. (а) – $p=2\%$, (б) – $p=5\%$, (в) – $p=8\%$, (г) – $p=11\%$, (д) – $p=14\%$, (е) – $p=17\%$, (ж) – $p=20\%$, (з) – $p=23\%$.

На рисунке 12 представлено сравнение значений пикового напряжения, полученных моделированием, с экспериментальными данными для образцов с различной пористостью.

Деформирование и разрушение мезообъемов лабораторных образцов искусственного материала при одноосном сжатии

Исходные образцы из песчано-цементной смеси были подготовлены для данного исследования. Алмазным диском из большего образца было вырезано 10 образцов в виде параллелограмма. Лабораторное нагружение образцов производилось на универсальной испытательной машине Instron 1185 в режиме контроля деформации со скоростью нагружения 0.05 мм/мин. Продольная деформация регистрируется с помощью встроенного программного обеспечения Instron, а поперечная деформация одновременно регистрируется датчиком, установленным вокруг образца.

Полученные полные диаграммы деформации шести образцов показаны на рис. 13а. Остальные образцы были отбракованы. Начальная стадия нагружения имеет нелинейный вогнутый участок кривой $\sigma_1 - \varepsilon_1$. Линейная зависимость кривой $\sigma_1 - \varepsilon_1$ ярко выражена на

следующем этапе деформации.

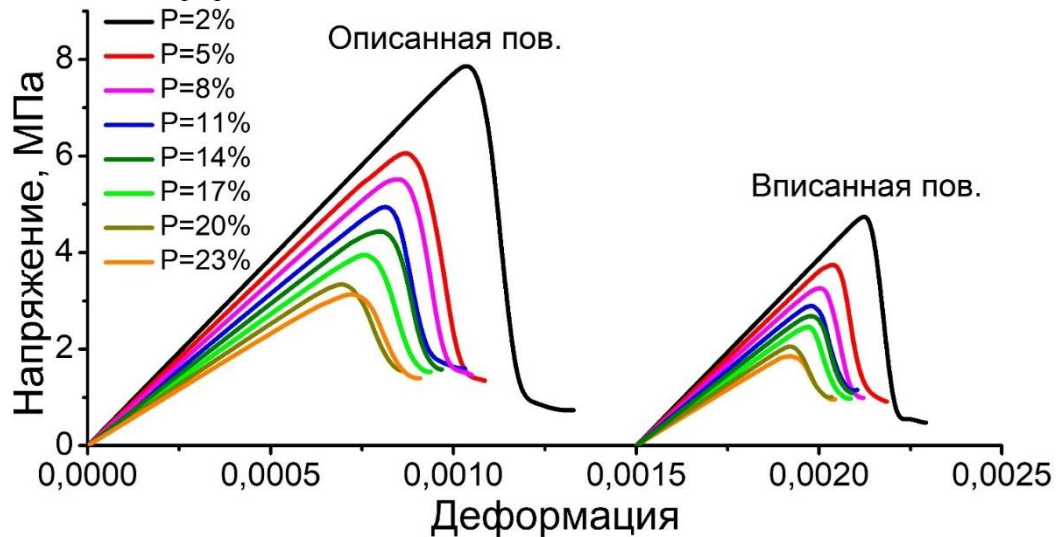


Рисунок 11 – Диаграммы нагружения образцов с различной пористостью с использованием описанного и вписанного критериев ДП.

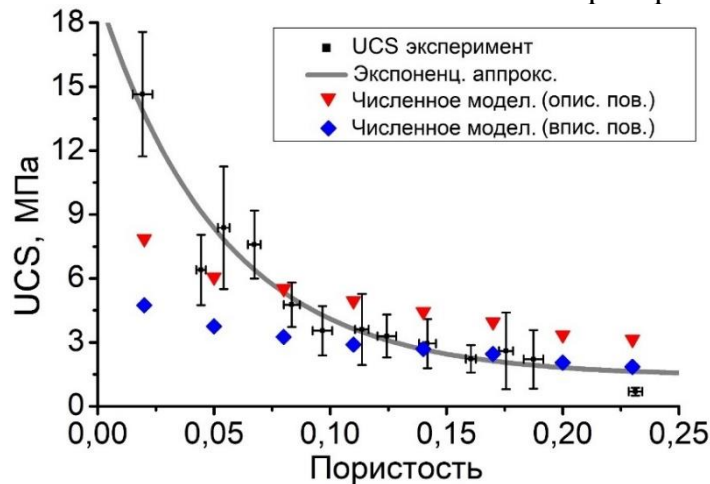


Рисунок 12 – Сравнение прочности на сжатие, полученной моделированием, с экспериментальными данными.

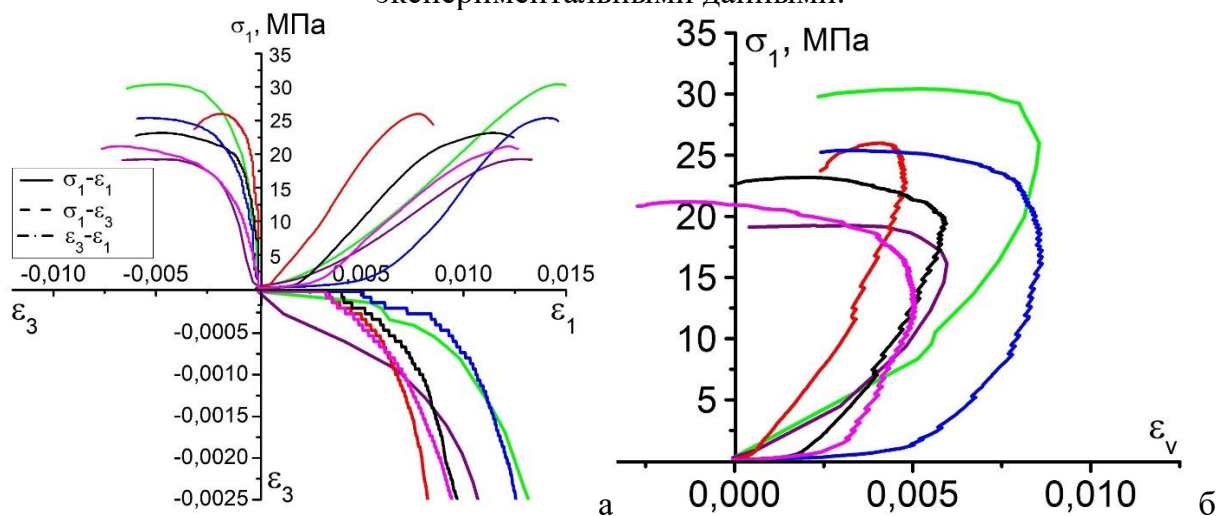


Рисунок 14 – Полная диаграмма деформирования нагруженных образцов: (а) зависимость $\sigma_1 - \varepsilon_1$, $\sigma_1 - \varepsilon_3$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$; (б) зависимость $\sigma_1 - \varepsilon_v$.

Судя по кривым $\sigma_1 - \varepsilon_3$, упругая стадия непродолжительна. Отклонение от линейности на этих кривых свидетельствует о процессе зарождения трещин, что указывает на начало следующей стадии. Зародившиеся трещины демонстрируют

устойчивый рост после превышения порога σ_{ci} . На основании анализа кривых отношение напряжения зарождения трещины к максимальному напряжению лежит в диапазоне $\approx 0.42-0.52$.

Для определения порога начала неустойчивого трещинообразования σ_{cd} построена зависимость осевого напряжения σ_1 от объемной деформации ε_v по выражению $\varepsilon_v \approx \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$. В работах Бенъявского точка разворота, в которой производная кривой $\sigma_1-\varepsilon_v$ меняет знак, принимается за порог начала неустойчивого трещинообразования σ_{cd} .

Наконец, когда достигается пиковое напряжение σ_p , отчетливо проявляется начало ниспадающей части кривой напряжения-деформации. На этом этапе формируется окончательный паттерн разрушения образцов. Рисунок 14 иллюстрирует несколько паттернов разрушения нагруженных образцов. Можно отметить, что ведущими механизмами разрушения являются сдвиговые трещины, наклоненные под углом $\approx 70^\circ$ к направлению действия нагрузки, а также субвертикальные трещины отрыва. Экспериментальные данные представлены в таблице (2).

Таблица 2 – Экспериментальные данные.

Эксп.	w, мм	l, мм	h, мм	E, ГПа	ν	σ_p , МПа	σ_{cc}/σ_p	σ_{ci}/σ_p	σ_{cd}/σ_p
Крас.	14.8	15	20.6	3.65	0.3	26	0.052	0.45	0.88
Зел.	14.8	14.8	22.2	2.72	0.14	30.4	0.15	0.65	0.86
Син.	14.1	14.5	20.2	4.06	0.27	25.4	0.1	0.48	0.67
Черн.	14.9	14.9	21.1	3.32	0.24	23.2	0.1	0.63	0.85
Лил.	14.8	14.8	21.2	2.89	0.26	21.2	0.1	0.46	0.66
Фиол.	14.8	13.8	22.5	2.14	0.13	19.28	0.23	0.48	0.84
Сред.	14.7	14.63	21.3	3.14	0.24	24.25	0.13	0.53	0.78



Рисунок 14 – Типичные паттерны разрушения нагруженных образцов.

Плотность образцов определяли как отношение массы к объему образцов, объем пор не учитывался. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала определялись по полной диаграмме нагружения образцов по наклонам упругого участка. На основании РЭМ-изображения поверхности образца, подверженной травлению (рис. 15а), общая пористость материала составляет $\approx 2\%$, распределение пор по размерам показано на рис. 15б. Некоторые из этих данных далее напрямую переносятся в качестве параметров модели (ρ , E и ν), другие экспериментальные параметры (прочностные) используются для валидации параметров модели.

Дизайн модели представительного мезообъема образцов (рис. 15в) выполнен по методике, описанной выше в соответствии с распределением пор по размерам,

представленным на рис. 15б.

Стадийность процесса деформации

Основной интерес представляют стадии деформации образцов, так как они определяются пороговыми напряжениями зарождения трещин, неустойчивого трещинообразования и пикового напряжения на диаграмме нагружения. Рисунок 16 иллюстрирует кривую напряжение-деформация нагруженного образца, совмещенную с импульсами АЭ. Серая кривая представляет собой общее накопленное количество импульсов АЭ, а красная кривая представляет приращение смоделированных импульсов АЭ.

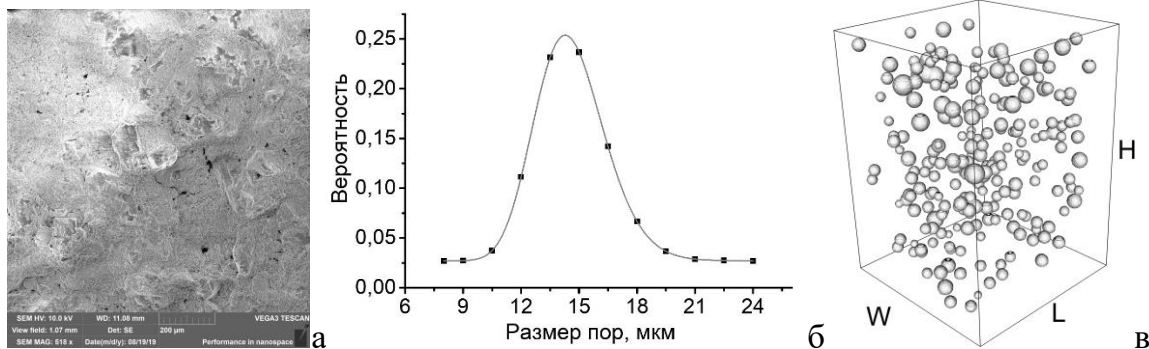


Рисунок 15 – РЭМ-паттерн поверхности образца, подверженной травлению (а), функция плотности вероятности распределения пор по размерам (б), полученная модель мезообъема, высота образца $H \approx 715$ мкм, $H:W=2.1:1.5$ (в).

Таблица 3 – Набор физико-механических свойств в модели.

ρ_0 , г/см ³	К, ГПа	μ , ГПа	σ_c , МПа	σ_t , МПа	Y_0 , МПа	α_1	α_2	γ^*
2.08	2.842	1.312	24.3	2.5	7.63	1.41	0.78	0.004

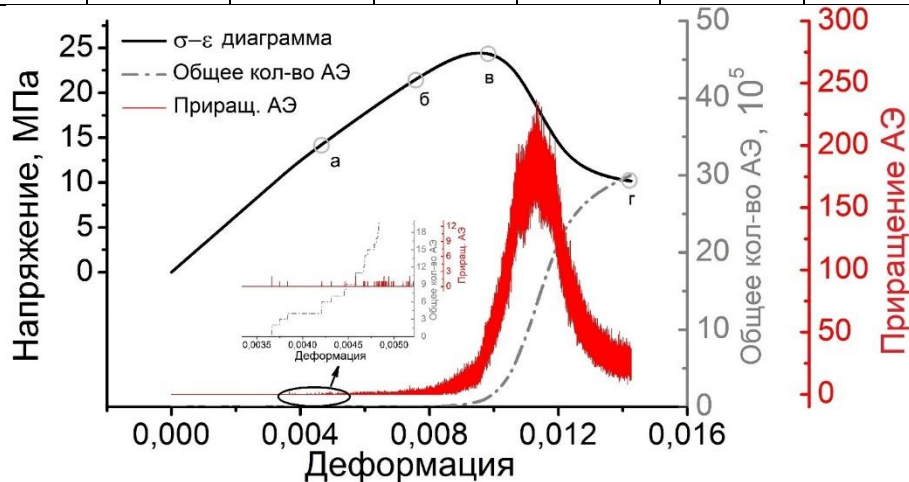


Рисунок 16 – Диаграмма деформирования, совмещенная с моделируемыми импульсами акустической эмиссии.

На основании экспериментальных результатов, полученных в данной работе, пороговое напряжение зарождения трещины для рассматриваемого искусственного материала составляет $\approx 53\%$. Кривая напряжение-деформация, полученная посредством численного моделирования и смоделированные первые импульсы АЭ, свидетельствуют об отклонении от линейности, когда уровень осевого напряжения, усредненного по мезообъему, достигает ≈ 12 МПа, что составляет $\approx 57\%$ пикового напряжения σ_p . Таким образом, модель предсказывает пороговое напряжение зарождения трещины с ошибкой менее 10%, что является достаточно надежным. На рисунке 17 показаны закономерности накопления повреждений в последовательные моменты времени а–г. Можно отметить, что зарождение локализации деформации связано с границей раздела фаз, на которой

наблюдается концентрация напряжений (см. рис. 19). Трещины I типа зарождаются в областях объемного растяжения (гидростатическое давление $P < 0$), в то время как трещины типа II стремятся зародиться в областях объемного сжатия (гидростатическое давление $P > 0$).

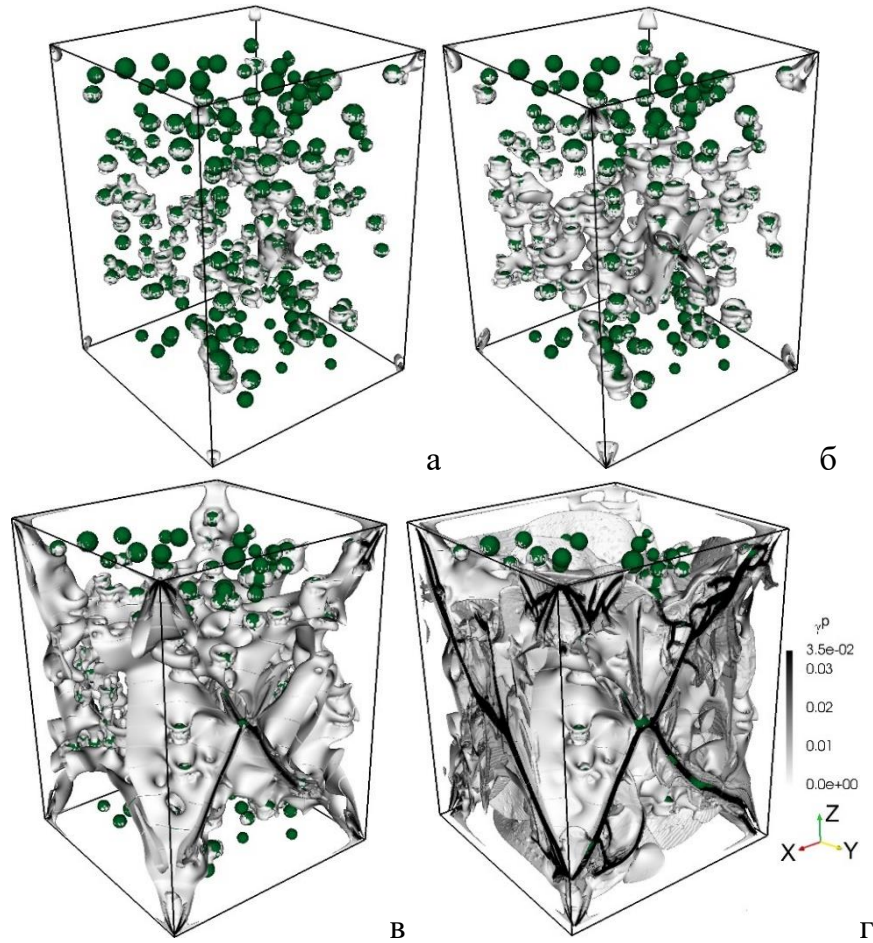


Рисунок 17 – Стадии накопления неупругих деформаций, относящиеся к соответствующим состояниям а–г на рис. 16.

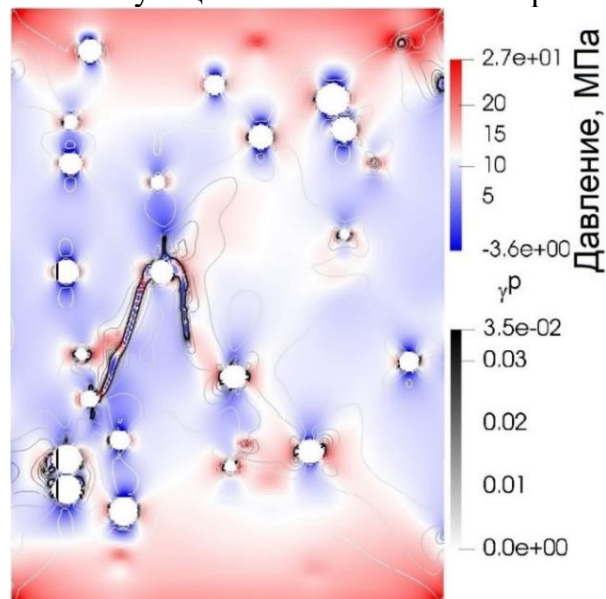


Рисунок 18 – Комбинированный паттерн гидростатического давления и неупругой деформации в вертикальном сечении модели в состоянии (в).

Результаты численного моделирования показывают, что мы не можем определить

точное значение σ_{cd} по диаграмме импульсов АЭ. Рассмотрим кривые зависимости мгновенного коэффициента Пуассона, рассчитанного как $\mu_{31} = -\varepsilon_3/\varepsilon_1$, объемной деформации $\Delta V/V$ от осевой деформации ε_1 и полной диаграммы деформирования, полученной численным моделированием. На рис. 19 показана полная диаграмма деформирования, полученная с помощью численного моделирования, которая в дальнейшем использовалась для определения порогового напряжения неустойчивого трещинообразования. Обработка полной диаграммы деформирования позволила получить кривые зависимости $\mu_{31}(\varepsilon_1)$ (см. рис. 20а) и $\Delta V/V(\varepsilon_1)$ (см. рис. 20б). При изменении знака производной функции $\Delta V/V(\varepsilon_1)$ уровень осевого напряжения составляет ≈ 22 МПа. Таким образом, отношение порога неустойчивого трещинообразования σ_{cd} , определенного по методу обратной точки, к пиковому напряжению σ_p равно 0.89, что попадает в диапазон, указанный Хоеком и Мартином для горных пород и удовлетворительно соответствует экспериментальным данным, полученным в настоящей работе.

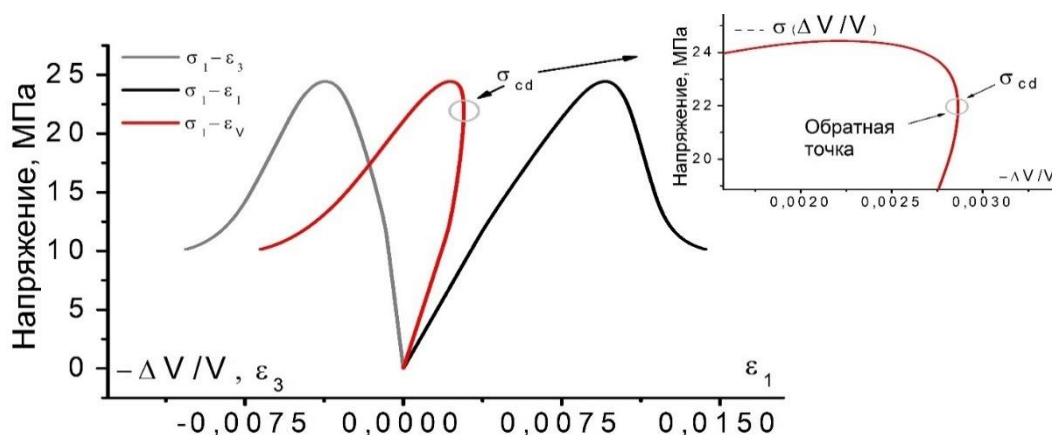


Рисунок 19 – Полная диаграмма деформирования мезообъемов, полученная численным моделированием.

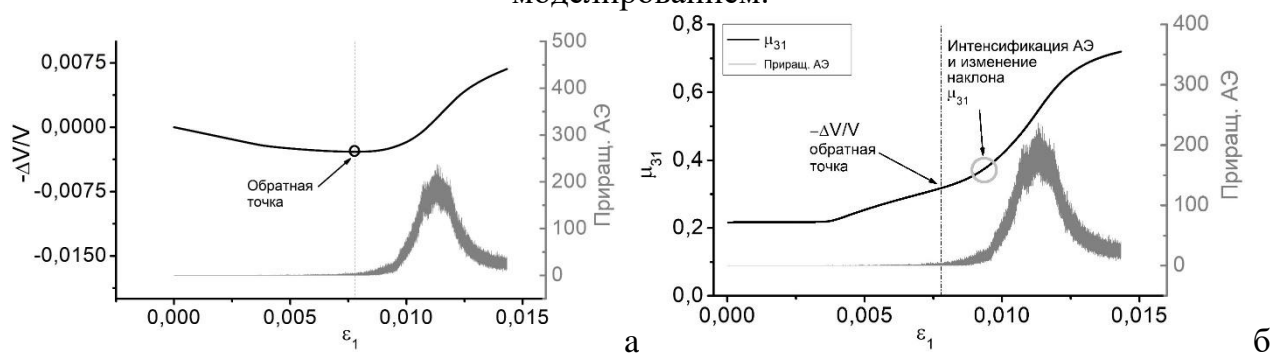


Рисунок 20 – Кривые зависимости в сочетании с приращением АЭ: (а) объемная деформация, (б) мгновенный коэффициент Пуассона.

По мере приближения к порогу неустойчивого трещинообразования (σ_{cd}), приращение моделируемых импульсов АЭ непрерывно увеличивается. Наконец, начало неустойчивой стадии деформации наблюдается после состояния (б), что подтверждается взрывным увеличением числа импульсов АЭ. По мере приближения к состоянию остаточной прочности (г) можно наблюдать окончательный паттерн разрушения образца с выходом зон локализации деформации на свободные поверхности образца. Преобладающими являются сдвиговые трещины с углами наклона в диапазоне $45\text{--}70^\circ$ к направлению нагружения.

В четвертом разделе решена задача эволюции напряженно-деформированного состояния элементов горного массива при движении очистной подземной выработки.

Упрощенная стратиграфическая колонка Кондомского месторождения вблизи

пласта 9а представлена на рис. 21. Двумерная структурная модель горного массива построена на основе колонки. На рис. 21 также изображены схемы нагружения и отработки пласта 9а. Места начала и конца отхода лавы показаны белыми квадратами, расстояние между которыми составляет 200 м.

К модели были приложены следующие граничные условия:

$$v_y = 0, x_i \in B_1 \quad (15a)$$

$$v_x = 0, x_i \in B_2, B_4 \quad (15b)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma_{cover}, x_i \in B_3 \quad (15c)$$

$$\sigma_{ij} = -P_0\delta_{ij}, P_0 = 0.1 \text{ МПа}, x_i \in B_5 \quad (15d)$$

Линия механизированной крепи моделируется зоной давления (2 МПа), движущейся в направлении забоя и занимающей 5 ячеек за лавой (3.5 м). Общее количество элементов (ячеек) составляет 900 и 510 по оси X и Y, соответственно, шаг сетки 70 см. Горизонтальный и вертикальный размеры расчетной области составляют 630 м и 360 м, соответственно. В таблице 4 представлены физико-механические свойства пород в модели.

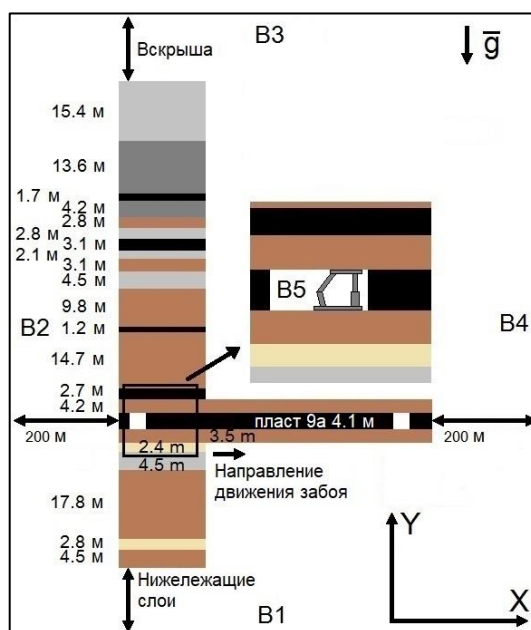


Рисунок 21 – Упрощенная структурная модель горного массива, а также схемы нагружения и отработки на примере пласта 9а Кондомского месторождения.

Таблица 4 – Физико-механические свойства горных пород, использованных в модели.

Порода	ρ , г/см ³	K, ГПа	μ , ГПа	σ_T , МПа	σ_c , МПа	γ_0 , МПа	α_1	α_2	Λ
Песчаник	2.54	8.729	7.45	0.94	2.84	1.15	0.87	0.5	0.06
Алевролит	2.55	9.412	6.55	0.63	1.863	1.01	0.85	0.48	0.06
Аргиллит	2.46	9.255	5.95	0.3	0.93	0.82	0.89	0.58	0.07
Угл. аргил.	1.93	8.4	5.4	0.5	1.51	0.7	0.87	0.55	0.07
Уголь	1.29	2.35	1.625	0.37	1.19	0.3	0.91	0.47	0.06

Закономерности накопления повреждений на примере пласта 7

Очевидно, что при нахождении горного массива в начальном гравитационном напряженном состоянии ось первого главного напряжения ориентирована горизонтально в отсутствие тектонических напряжений. Данные моделирования показывают, что траектории максимального главного напряжения претерпевает поворот от

горизонтального к субвертикальному при подвигании забоя. Рис. 22а–г также иллюстрирует процесс поворота оси максимального главного напряжения. Увеличение выработанного пространства, в свою очередь, вызывает увеличение объема пород, в которых происходит поворот оси максимального главного напряжения.

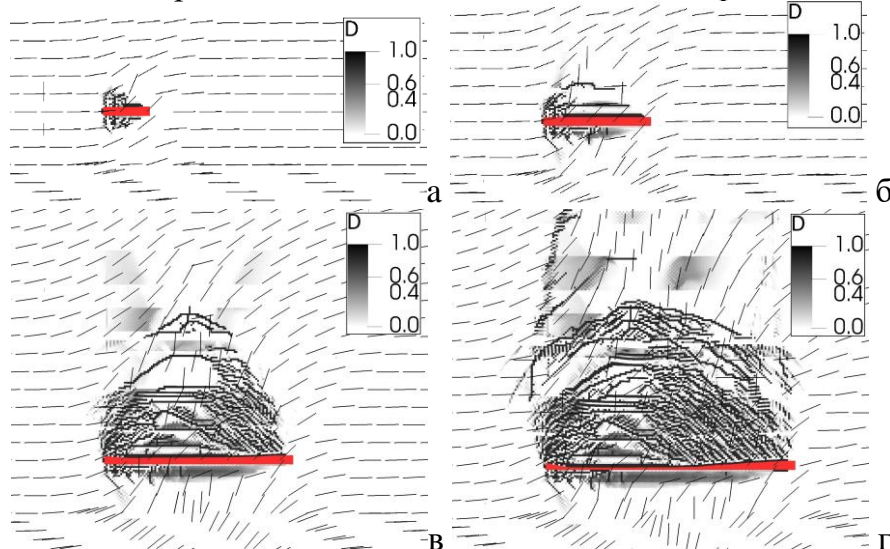


Рисунок 22 – Накопленные повреждения (параметр D) в элементах горного массива и стадии поворота оси максимального главного напряжения (стрелки без наконечника) для различных расстояний подвигания забоя: (а) – 13 м, (б) – 37 м, (в) – 68 м, (г) – 92 м.

Диаграммы опорного давления

В результате анализа данных численного моделирования, было установлено, что максимальный уровень опорного давления наблюдается $\approx 1.5-2.5$ м вглубь отработываемого выемочного столба перед забоем до первого обрушения основной кровли. После первого обрушения появляется плато максимального опорного давления с небольшими колебаниями на участке $\approx 6-8$ м вглубь столба перед забоем. Диаграммы опорного давления для последовательных моментов подвигания забоя t_i (рис. 23а) показывают, что относительная концентрация вертикальных напряжений находится в диапазоне 1.5–2.5 от гравитационных напряжений. Влияние опорного давления распространяется на расстояние до ≥ 150 м после первого обрушения основной кровли. Расчеты также показывают, что на 1.5–2.5 м от забоя вглубь выемочного столба уголь деформируется неупруго (рис. 23б).

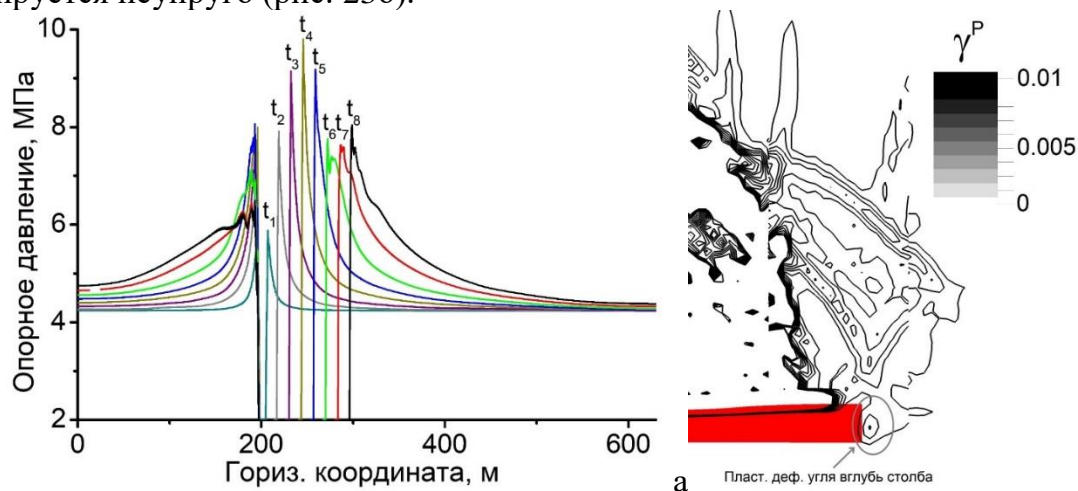


Рисунок 23 – Диаграммы опорного давления для различных расстояний подвигания забоя: 1 – 5 м, 2 – 16 м, 3 – 30 м, 4 – 43 м, 5 – 56 м, 6 – 69 м, 7 – 82 м, 8 – 95 м на горизонте угольного пласта (а), паттерн интенсивности неупругой деформации (б).

Валидация шагов первого и периодического обрушений кровли по данным полевых наблюдений

Рисунок 24 иллюстрирует оценки первого и периодического обрушения кровли на примере пласта 29а. Структурная модель массива совмещена с паттерном накопленных повреждений, обусловленных подвиганием забоя. На рис. 25а показана зависимость шагов первого обрушения кровли от мощности основной кровли. В рассматриваемом диапазоне мощностей слоя основной кровли шаг обрушения почти линейно возрастает. Результаты моделирования дают несколько завышенные значения шага первого обрушения, ошибка оценки составляет $\approx 10\%$. Отметим, что такое согласие модельных результатов с полевыми данными является достаточно хорошим. В то же время согласие численных оценок шагов периодического обрушения значительно занижены (рис. 28б). Это связано с несколькими причинами. После первого обрушения основной кровли скорость подвигания забоя обычно увеличивается на 30-40% от начальной скорости. Увеличение скорости подвигания забоя, как правило, вызывает увеличение длины шагов обрушения. В модели изменение скорости подвигания забоя не проводилось. Вторая причина заключается в том, что после первого обрушения несущая способность обрушенных пород восстанавливается по мере удаления от забоя за счет действия физического механизма компактирования. Восстановление несущей способности в области обрушенных пород также не рассматривалось в модели.

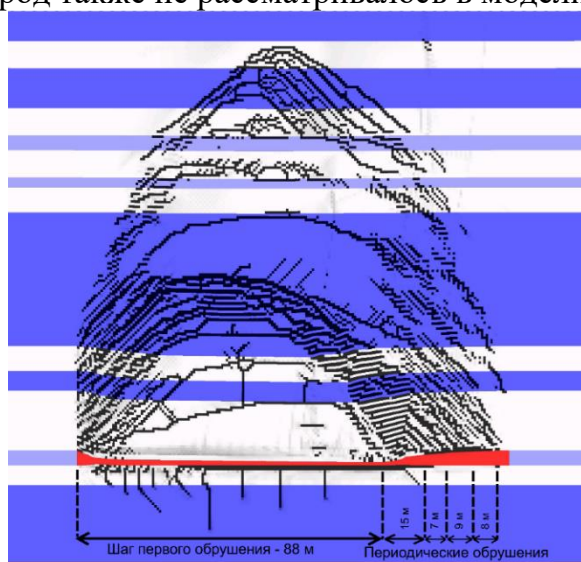


Рисунок 24 – Оценка шагов первого и периодического обрушений кровли на примере пласта 29а.

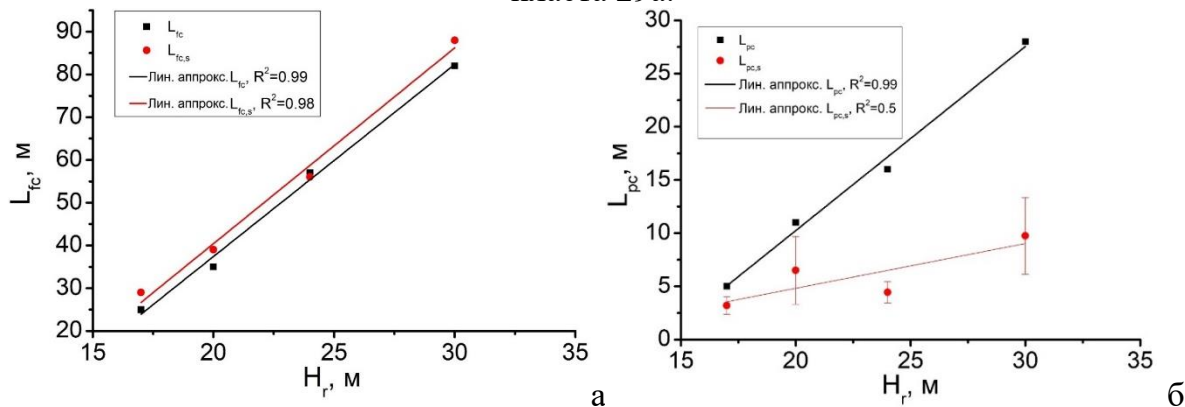


Рисунок 25 – Сводный график оценки шагов: первого обрушения кровли (а), периодического обрушения кровли (б).

Оценка устойчивости охранных целиков при отработке смежных выемочных

столбов наклонного угольного пласта

На основе упрощенной стратиграфии Кондомского месторождения (рис. 26а) построена трехмерная геомеханическая модель (рис. 26б). Выемочные столбы залегают на глубинах $\approx 540-650$ м, наклонный пласт 3 на исследуемом участке имеет угол падения 16° . Ширина столба составляет 200 м, высота выработки 3.6 м, ширина целика ≈ 40 м, ширина штрека 5 м. Номера штреков указаны римскими цифрами. Стратиграфия над пластом 1 в модели не учитывается, для простоты она заменена однородным пластом породы конечной мощности для уменьшения влияния граничных условий. Модель изначально находится в гравитационном напряженном состоянии.

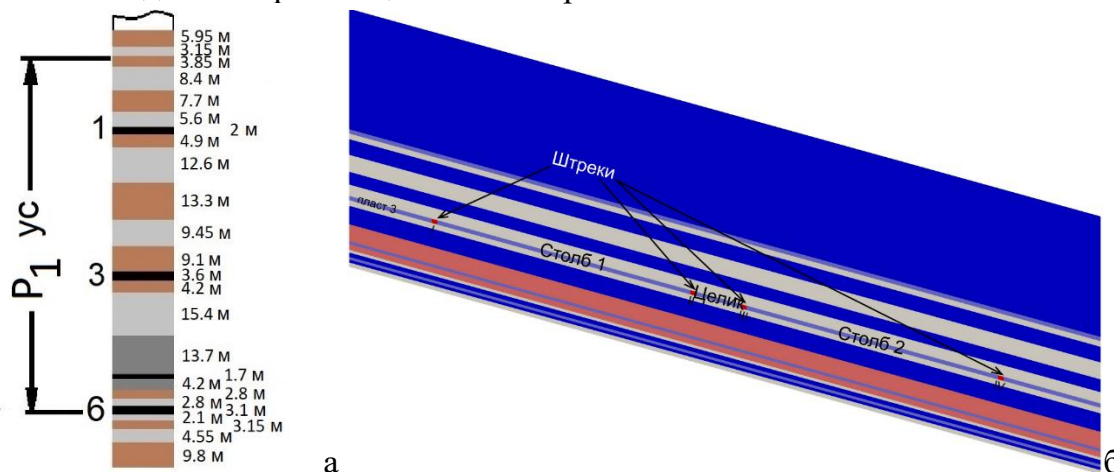


Рисунок 26 – Упрощенная стратиграфия (а), центральное сечение геомеханической модели (б) исследуемого участка.

Следующие этапы моделирования связаны с проходкой выработок – сначала извлекается столб 1, а затем столб 2. Нормальные перемещения модели ограничены во всех гранях, кроме верхней. Вес вскрышных пород (540-710 м) учитывается неявно путем задания значения вертикальной компоненты тензора напряжений. В рамках модели предполагается идеальный механический контакт между осадочными слоями. Расчетная область состоит из 18.6 млн элементов сетки, шаг сетки 1.15 м.

Таблица 5 – Физико-механические свойства горных пород, используемые при моделировании.

Порода	ρ , г/см ³	K, ГПа	μ , ГПа	σ_c , МПа	σ_t , МПа	Y_0 , МПа	α_1	α_2	Λ_0
Песчаник	2.54	12.22	10.43	22.1	2.82	3.45	1.34	0.84	0.08
Алеврит	2.55	13.18	9.17	13.92	1.11	3.03	1.32	0.81	0.1
Угл. аргил.	1.93	11.76	7.56	11.73	1.5	2.1	1.34	0.9	0.12
Уголь	1.29	3.29	2.275	2.616	1.1	0.9	0.7	0.7	0.11

Эволюция НДС при отработке выемочных столбов

Проследим стадии в распределении неупругих деформаций в процессе наращивания выработанного пространства столба 1. Этот шаг численного моделирования необходим для валидации модели. Для этого мы сравниваем шаги обрушения кровли с полевыми данными. На рисунке 27 показаны стадии развития повреждений в кровле угольного пласта после первого обрушения. Судя по распределению повреждений на рис. 27а, можно наблюдать сильную неоднородность и асимметрию. Дальнейшие стадии развития повреждений в кровле показаны на рис. 27 б и в. На рисунке 27г показано окончательное распределение повреждений в кровле, соответствующее состоянию сдвижения пород. Куполообразные повреждения кровли пласта 3 сосредоточены в левой

части столба 1 ближе к штреку I. Такое распределение понятно, так как кровля пласта имеет значительно большую опору у охранного целика, чем у штрека I из-за наклона.

На рисунке 28а показано распределение повреждений в вертикальном сечении модели в плоскости, близкой к штреку I. Измерение длины первого купола вдоль направления простирания дает значение первого шага обрушения ≈ 50 м, что характерно для шахт Южного Кузбасса. Наконец, после извлечения столба 1, получаем распределение вертикального напряжения на горизонте угольного пласта, показанное на рис. 28б.

Следующий шаг численного моделирования связан с восстановлением несущей способности пород в выработанном пространстве столба 1. На этом шаге мы предполагаем, что сдвижение пород над выемочным столбом 1 полностью завершено, и гравитационное поле напряжений восстановлено. Проследим далее стадии распределения неупругих деформаций в процессе наращивания выработки в выемочном столбе 2. На рисунке 29 показано распределение накопленных повреждений в массиве горных пород для различных моментов наращивания выработки в выемочном столбе 2.

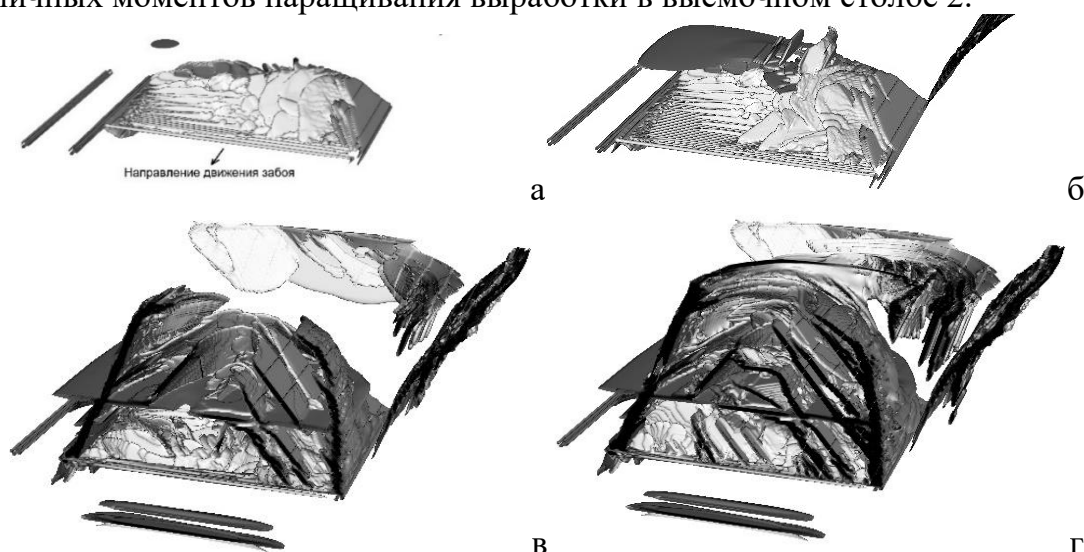


Рисунок 27 – Стадии развития повреждений при отработке выемочного столба 1: а – 136 м, б – 178 м, в – 203 м, г – состояние сдвижения пород.

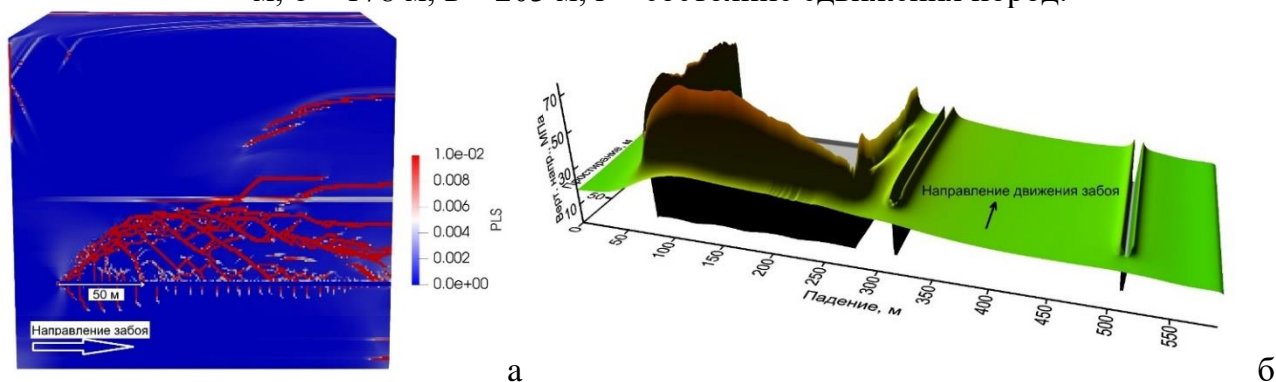
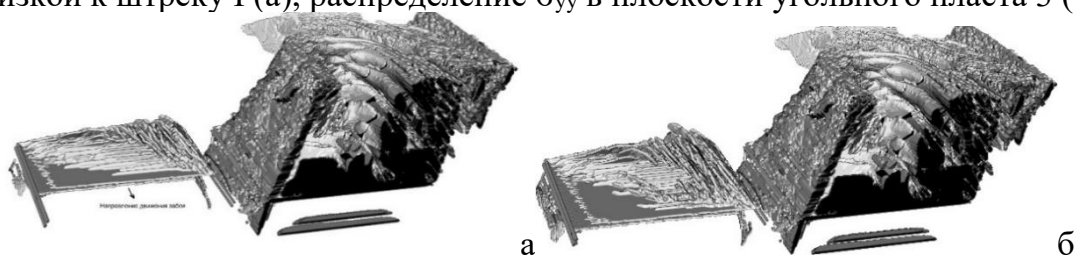


Рисунок 28 – Распределение повреждений в вертикальном сечении модели в плоскости, близкой к штреку I (а), распределение σ_{yy} в плоскости угольного пласта 3 (б).



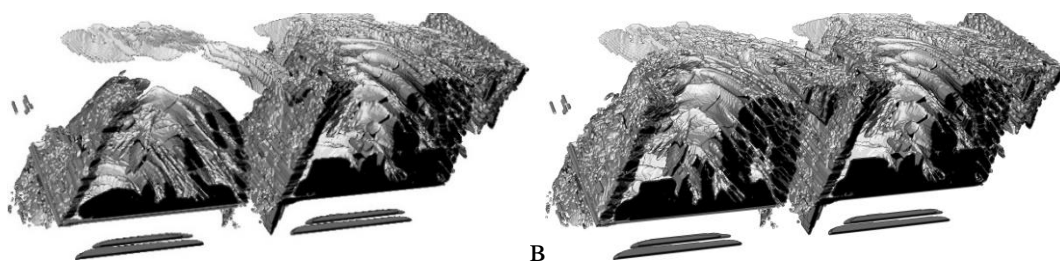


Рисунок 29 – Стадии развития повреждений при обработке выемочного столба 2: а – 136 м, б – 178 м, в – 203 м, г – состояние сдвижения пород.

Получив распределение повреждений и неупругих деформаций в массиве горных пород после извлечения двух смежных выемочных столбов, можно перейти к анализу распределения напряжений в охранном целике между столбами. Компонента тензора вертикальных напряжений σ_{yy} и интенсивность напряжения τ используются в приведенном ниже анализе напряжений. Рисунок 30 иллюстрирует распределение вертикального напряжения вдоль линии, проведенной через центр модели в направлении падения пласта 3. Вскоре после извлечения столба 1 (забой достиг границы расчетной области), концентрация вертикальных напряжений (серая штрихпунктирная линия) усиливается в районе целиков с левой и правой стороны столба 1. Извлечение столба 1 влияет также на концентрацию напряжений в краевой части нетронутого столба 2.

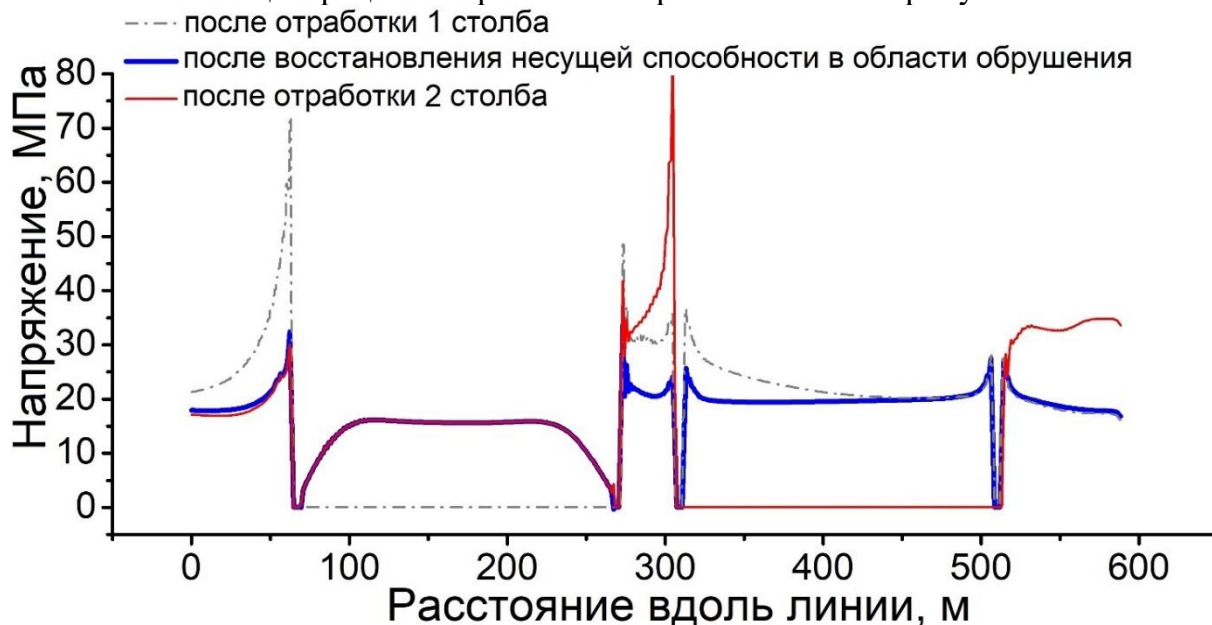


Рисунок 30 – Распределение вертикального напряжения вдоль линии, проведенной через центр модели в направлении падения пласта 3.

При этом, когда происходит восстановление несущей способности в области обрушенных пород, концентрация напряжений значительно снижается и приближается к диаграмме нормального опорного давления (синяя линия) с максимальным коэффициентом концентрации напряжений ≈ 2 . Однако извлечение столба 2 приводит к еще большей концентрации вертикальных напряжений в охранном целике. Интересно, что в случае наклонного угольного пласта, в правой стороне целика наблюдается значительно большее возрастание вертикальных напряжений.

Методика оценки коэффициента запаса прочности

Сложность напряженного состояния объясняется усиленным влиянием касательных напряжений, обусловленных наклоном угольного пласта. По этой причине соотношение прочности на одноосное сжатие и вертикального напряжения необходимо заменить формулой, подходящей для обобщенного напряженного состояния. Поскольку

в работе используется уравнение Друкера-Прагера, то прочность среды на сдвиг имеет следующий вид:

$$\tau_s = Y + \alpha P \quad (16)$$

Интенсивность напряжений, действующих на элемент среды, рассчитывается через следующее выражение:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (17)$$

Используя уравнения 16 и 17, можно найти соотношение, которое представляет собой формулу коэффициента запаса прочности для случая обобщенного напряженного состояния:

$$F_s = \frac{\tau_s}{\tau} = \frac{Y + \alpha P}{\sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}} \quad (18)$$

Рассмотрим распределение параметров напряженно-деформированного состояния в охранном целике. На рисунке 31 показаны комбинированные распределения вертикального напряжения σ_{yy} , интенсивности неупругой деформации γ^P вдоль линии, проведенной через центр модели в направлении падения пласта 3, и коэффициента запаса прочности F_s в пределах целика.

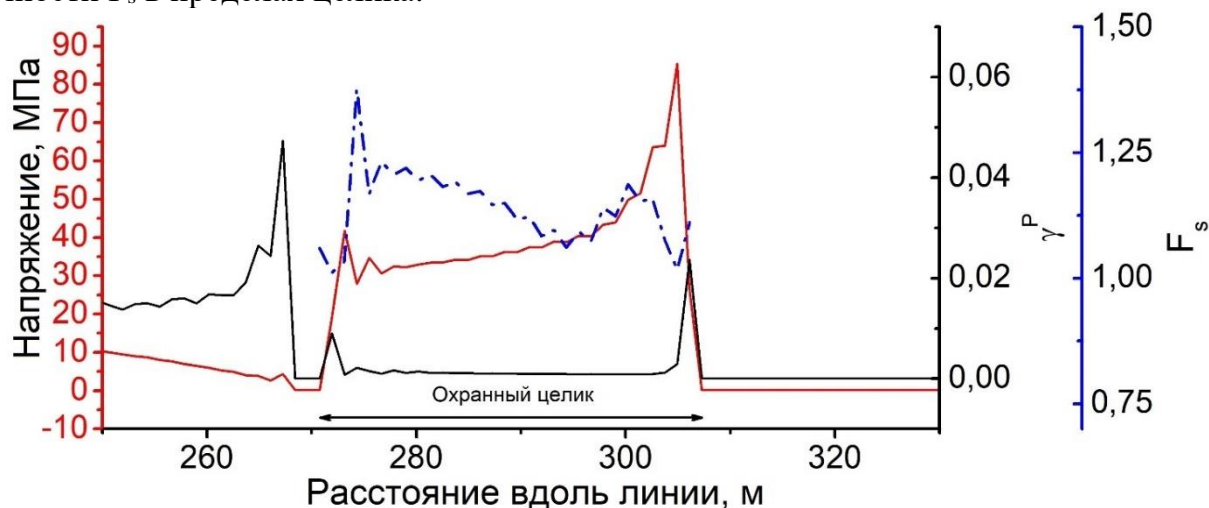


Рисунок 31 – Распределение вертикального напряжения σ_{yy} , интенсивности неупругой деформации γ^P и коэффициента запаса прочности F_s вдоль линии, проведенной через центр модели в направлении падения пласта 3 после извлечения столба 2.

Судя по распределению интенсивности неупругой деформации, краевые части охранного целика в ходе эволюции НДС накапливали 1-2% неупругой деформации. Этого достаточно, чтобы породы в краевой части целика потеряли устойчивость. Можно отметить, что сильная концентрация напряжений на правой стороне целика снижает коэффициент запаса прочности F_s в этой части целика до диапазона 1–1.1, что ниже, чем на левой стороне.

Рассмотрим также значения коэффициента запаса прочности, усредненные по всему объему охранных целиков, при различных соотношениях W/H . На рис. 32 показана полученная зависимость среднего значения F_s от отношения W/H . Отметим, что зависимость представляет собой нелинейную асимптотическую функцию, приближающуюся к своей асимптоте при отношении $W/H \approx 11$. Дальнейшее увеличение ширины целика экономически нецелесообразно, так как существенного изменения F_s , согласно полученной асимптотической зависимости не происходит. В то же время дальнейшее увеличение ширины целика приводит к снижению коэффициента извлечения

угля.

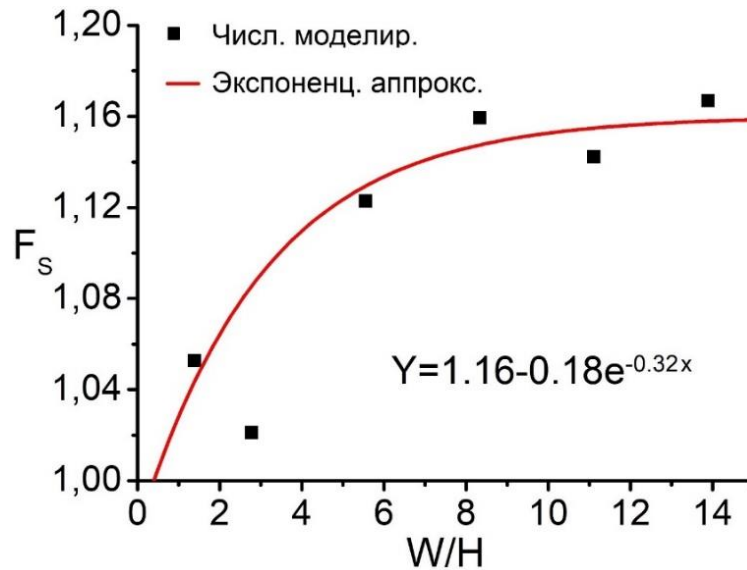


Рисунок 32 – Зависимость F_s от отношения W/H , осредненного по объему охранного целика.

Численная методика оценки формирования критических состояний в горном массиве с подземной выработкой

Рассмотрим модельный массив пород с выработкой, схема представлена на рис. 33. В массиве выделен продуктивный угольный пласт, непосредственная и основная кровля и почва, вышележащие осадочные породы. Забой от монтажной камеры движется вправо, наращивая выработанное пространство. Деформация и разрушение элементов горного массива происходит под действием сил тяжести в соответствии с заданной глубиной выработки. Тектонические напряжения не учитывались. В таблице 6 приведены физико-механические свойства материалов, использованных при моделировании.

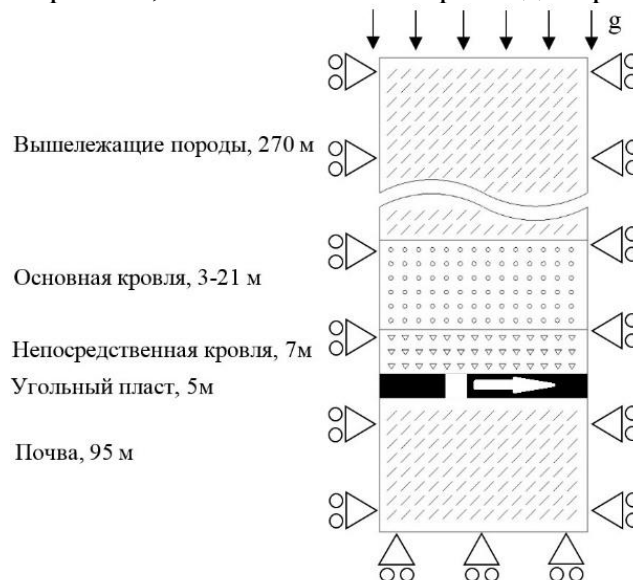


Рисунок 33 – Стратиграфическая колонка горного массива, вмещающего угольный пласт и граничные условия, отвечающие действию сил тяжести и стесненности условий деформации.

На рис. 34 приведен пример распределения в кровле и почве кулоновских напряжений ($\sigma_c = \tau / (Y + \alpha P)$) для двух моментов времени, когда забой отошел от монтажной камеры на расстояние порядка 55 м (повреждены пока только непосредственная кровля и почва, рис. 34а) и на этапе после первого обрушения и двух периодических обрушений

($L \approx 150$ м, рис. 34б).

Таблица 6 – Физико-механические свойства горных пород, используемые при моделировании.

Элемент	ρ_0 , г/см ³	К, ГПа	μ , ГПа	γ_0 , МПа	α	Λ
Угольный пласт	1,4	1,95	0,42	4	0,4	0,08
Непосредственная кровля	2,5	9	8,7	6	0,62	0,22
Основная кровля	2,2	12,8	5,34	8	0,6	0,12
Вышележащие породы	2,5	9	8,7	7	0,62	0,22
Почва	2,5	9	8,7	7	0,62	0,22

Все мелкомасштабные разрушения (подростающие трещины) порождают волны напряжений – аналог микросейсмическим событиям в реальном горном массиве. Как и в реальных условиях, в настоящих расчетах соответствующие колебания напряжений фиксируются «датчиками», расположенными в разных частях моделируемого горного массива (под датчиком понимается непрерывная запись напряжений в выбранных точках геосреды как функций времени; расположение «датчиков» показано на рис. 34б). Записи колебаний напряжений с нескольких датчиков приведены на рис. 35.

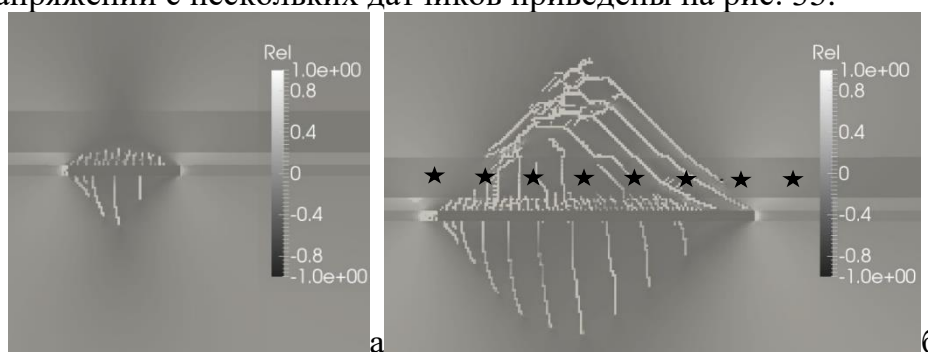


Рисунок 34 – Распределение относительных кулоновских напряжений в горном массиве с выработкой, мощность основной кровли 19 м, забой отошел от монтажной камеры на 55 м – а и на 150 м – б.

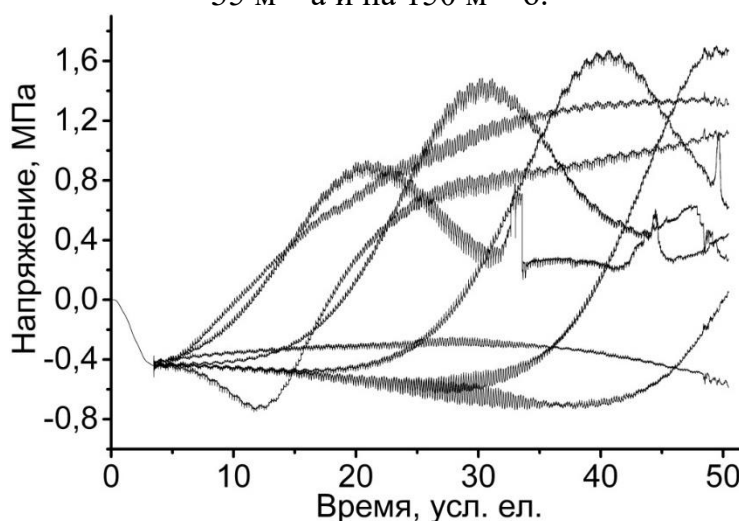


Рисунок 35 – Записи колебаний вертикальных напряжений в горном массиве при движении очистной выработки на нескольких датчиках.

Эволюция PDF зависимостей и соответствующие амплитудно-частотные

характеристики, демонстрирующие эволюцию характера колебаний напряжений при приближении горного массива к критическому состоянию, изображены на рис. 36 и 37 соответственно. Весь временной интервал был разбит на 6 условных равных участков, на каждом из которых были построены PDF – зависимость и амплитудно-частотная характеристика колебаний напряжений.

На начальных этапах деформирования PDF – зависимости имеют характерный колоколообразный вид (рис. 36 а, б). Подобный вид распределения свидетельствует об относительной независимости развития отдельных областей повреждений друг от друга (наблюдаются события разных масштабов). Однако по мере формирования областей повреждений больших масштабов зависимость кардинально меняет свой вид – переходя от П-образного распределения (рис. 36 в), демонстрирующего наличие равной доли колебаний с различными амплитудами, к ярко выраженному распределению с «тяжелыми хвостами». Согласно теории нелинейных динамических систем, формирование в системе распределений с «тяжелыми хвостами» свидетельствует о нарушении пространственно-временной симметрии (рис. 36 г, д). Последнее обусловлено тем, что в окрестностях выработки за сравнительно короткие интервалы времени формируются крупномасштабные разрушения в виде протяженных областей локализованной деформации. После первого обрушения PDF – зависимость приобретает вид симметричного распределения, свидетельствующего о релаксации большого количества накопленной энергии во время первого обрушения и восстановлении пространственно-временной симметрии (рис. 36 е).

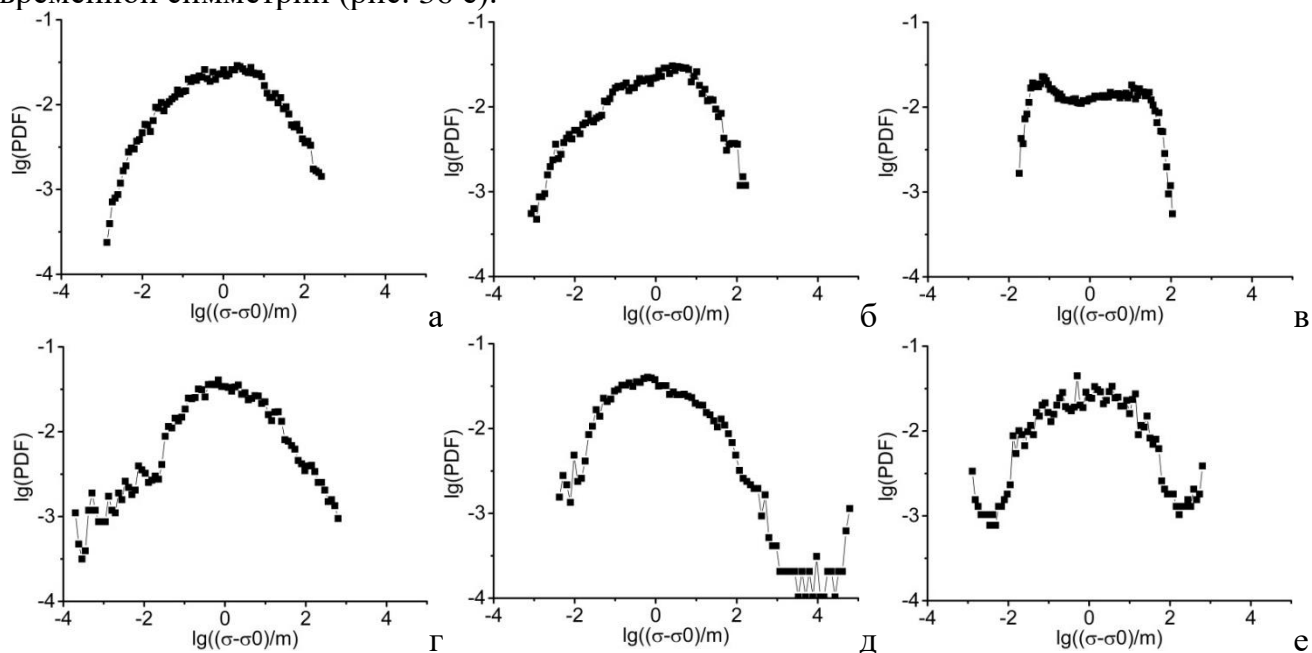


Рисунок 36 – Эволюция PDF – зависимости колебаний напряжений при движении очистной выработки.

Эволюция АЧХ интересна с позиции изменения ее наклона (рис. 37а-е). Расчеты показывают, что при формировании критического состояния в горном массиве, предвещающего первое обрушение кровли, происходит падение наклона АЧХ (рис. 37ж). Это означает, что в достаточно большом диапазоне масштабов разрушения происходит «выравнивание» событий по выделяемой энергии. Тот факт, что процесс разрушения активизировался на всех масштабных уровнях, свидетельствует об увеличении вероятности крупномасштабных разрушений – в данном случае первого обрушения кровли.

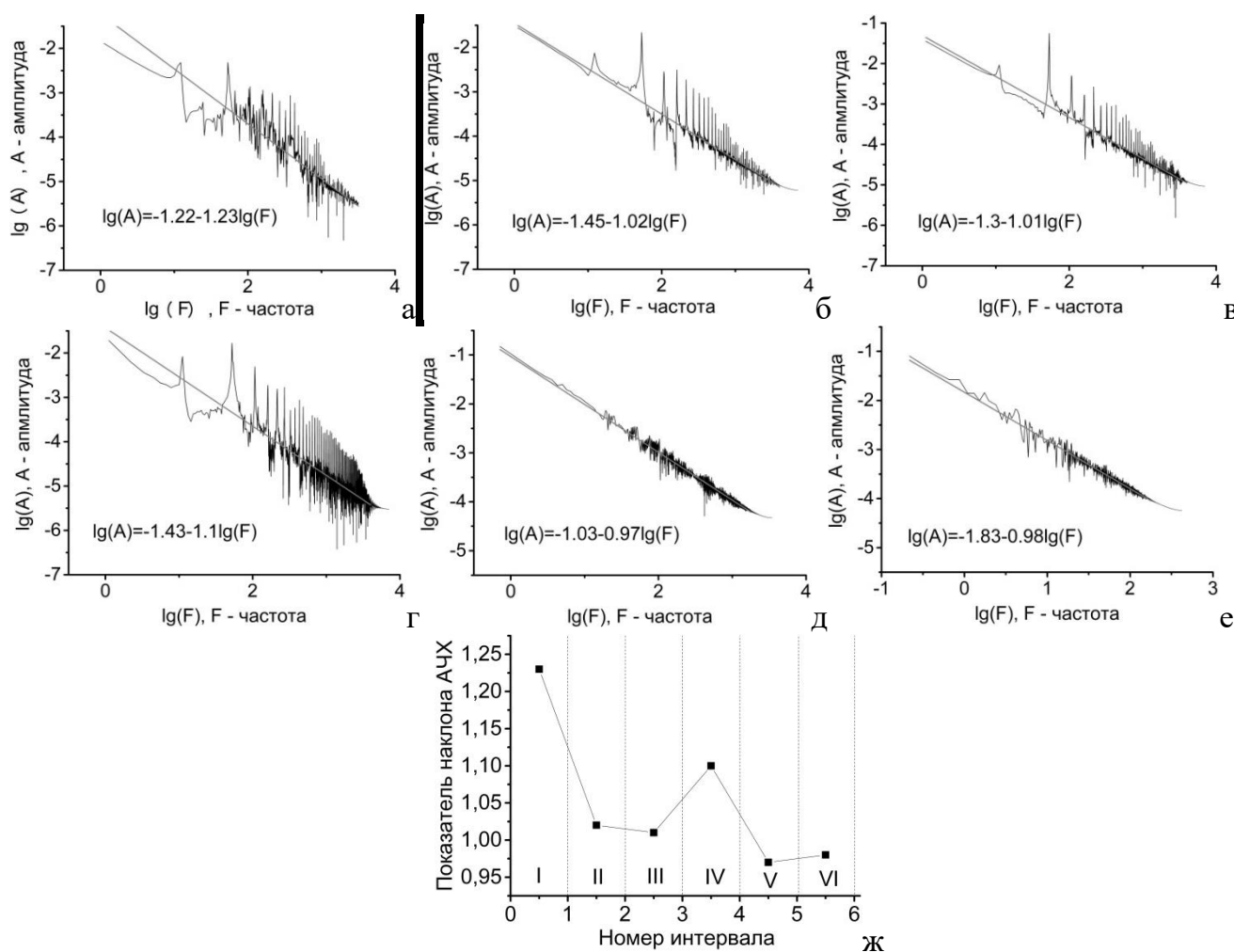


Рисунок 37 – Эволюция АЧХ колебаний напряжений при движении очистной выработки.

ВЫВОДЫ

1. Установлено, что отношение R_{ci} порогового напряжения зарождения трещины к прочности на сжатие для образцов с различной пористостью имеет немонотонную зависимость с максимумом при $\approx 8-10\%$. Вероятно, что при этом значении пористости начинается переход механизма разрушения к смешанному типу. Показано, что отношение R_{cd} порогового напряжения начала неустойчивого трещинообразования слабо зависит от пористости.

2. Полученные в результате моделирования значения прочности при одноосном сжатии при различной пористости образцов удовлетворительно согласуются со статистическими данными для более, чем 100 образцов песчаников Кузнецкого бассейна. При этом описанный критерий ДП лучше совпадает с экспериментом в диапазоне пористости 5-10%, а вписанный критерий ДП лучше соответствует эксперименту в диапазоне пористости 10-23%. При пористости менее 5% оба критерия занижают прочность образцов.

3. Расчеты показали, что увеличение пористости приводит к изменению доминирующего механизма разрушения. При пористости до $\approx 11\%$ преобладает образование протяженных трещин отрыва. При дальнейшем увеличении пористости образцы в основном разрушаются за счет образования большого количества мезомасштабных межпоровых трещин в объеме образцов. Некоторое расхождение между экспериментальными данными и данными численного моделирования связано с рядом

упрощающих гипотез, обсужденных в постановках задач.

4. Методы АЭ и мгновенного коэффициента Пуассона лучше подходят для определения порогового напряжения зарождения трещин, а не порогового напряжения неустойчивого трещинообразования; метод обратной точки лучше подходит для определения порогового напряжения неустойчивого трещинообразования; стадии деформации на диаграммах нагружения тесно связаны с развитием поврежденности образца; возникновение как трещин растяжения, так и трещин сдвига связано со структурными неоднородностями – порами в рассматриваемом случае; разработанная модель позволяет моделировать закономерности развития АЭ, поврежденности, а также основные паттерны разрушения.

5. Установлено, что шаги обрушения, определенные в расчетах, коррелируют с полевыми наблюдениями. Расчетное несоответствие между численными и полевыми данными находится в пределах 11%. Другие результаты, такие как учет характера неупругого деформирования угля перед забоем и диаграммы опорного давления, качественно и количественно согласуются с данными других исследователей и других шахт. Текущие ограничения модели связаны с неучтенным увеличением скорости подвигания забоя и восстановлением свойств обрушенных пород.

6. Предложен численный подход к оценке устойчивости охранных целиков наклонных пластов на основе анализа эволюции НДС на одной из шахт Южного Кузбасса. Подход основан на расширении классической формулы для оценки коэффициента запаса прочности на случай обобщенного напряженного состояния.

7. Наклон пласта приводит к асимметрии в распределении напряжений и деформаций; формирование большей области повреждений наблюдается в окрестностях I и III штреков; штреки I и III, вероятно, более склонны к нарушению функциональных свойств, чем штреки II и IV; для поддержания устойчивого состояния охранный целик, а также повышения коэффициента извлечения угля и экономической эффективности шахты, в качестве компромиссного решения было выбрано отношение ширины к высоте целика ≈ 11 .

8. Предложена численная методика оценки эволюции НДС горного массива с подземной выработкой к критическому состоянию (обрушению кровли). На основе новых полученных результатов численного моделирования и методов анализа теории нелинейных динамических систем показано, что формирование критического состояния в горном массиве сопровождается нарушением пространственно-временной симметрии и уменьшением наклона амплитудно-частотной характеристики колебаний напряженно-деформированного состояния. Полученные результаты могут быть применены для анализа эволюции НДС и прогноза формирования критических состояний в реальном горном массиве в рамках программы непрерывного геодинамического мониторинга, проводимого на шахтах.

Полученные результаты представляют практическую значимость для предприятий, осуществляющих добычу полезных ископаемых подземным способом, для обеспечения геодинамической безопасности ведения горных работ.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, входящих в базы данных WoS или Scopus

1. Eremin, M.O. Microstructure-Based Computational Analysis of Deformation Stages of Rock-like Sandy-Cement Samples in Uniaxial Compression / M.O. Eremin, V.A. Zimina, A.S. Kulkov, Y.P. Stefanov // Materials. – 2023. – Vol. 16. – PP. 1 – 24. Q1.

2. Eremin, M., Numerical Analysis of Pillar Stability in Longwall Mining of Two Adjacent Panels of an Inclined Coal Seam / M. Eremin, A. Peryshkin, G. Esterhuizen, L.

Pavlova, V. Fryanov // *Applied Sciences*. – 2022. – Vol. 12. – PP. 11028. Q2.

3. Eremin, M. Finite-difference numerical analysis of faulting and accompanying seismicity near the Chuya and Kurai depressions, Gorny Altai, Russia / M. Eremin // *Tectonophysics*. – 2021. – Vol. 803(2). – PP. 228703. Q1.

4. Eremin, M.O. Three-dimensional finite-difference analysis of deformation and failure of weak porous sandstones subjected to uniaxial compression / M.O. Eremin // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. – 2020. Vol. 133. – 104412. Q1.

5. Eremin, M.O. Numerical simulation of roof cavings in several kuzbass mines using finite-difference continuum damage mechanics approach / M. Eremin, G. Esterhuizen, I. Smolin // *International Journal of Mining Science and Technology* – 2020. – №30(2). – P. 157–166. Q1.

6. Eremin, M.O. Evaluation of fracture toughness of ZrO_2 -3.0 mol% Y_2O_3 ceramics utilizing wedge splitting loading of double cantilever specimen with a chevron notch / M.O. Eremin, E.E. Deryugin, S. Schmauder // *Engineering failure analysis*. – 2020. Vol. 110. – PP. 104409. Q1.

7. Deryugin, E.E. Study of deformation and fracture of $ZrO_2+3\%Y_2O_3$ ceramics by wedge splitting of a chevron-notched specimen / E.E. Deryugin, S. Schmauder, V.E. Panin, M.O. Eremin, I.V. Vlasov, N.A. Narkevich, G.V. Lasko, I. Danilenko, O.S. Kvashnina // *Engineering fracture mechanics*. – 2019. – Vol. 218. – PP. Q1.

8. Eremin, M.O. Investigation of Failure Mechanism of Al_2O_3 Specimens Subjected to Three-Point Bending Test / M.O. Eremin, A.S. Kulkov, I. Smolin, V. Mikushina // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2019. – Vol. 50. – PP. 38 – 45. Q2.

9. Eremin, M.O. Mathematical modeling of stress-strain evolution in the rock mass around a mine opening. evaluation of the steps of first roof caving at different thicknesses of the main roof / M.O. Eremin, P.V. Marakov // *Physical Mesomechanics*. – 2019. – №22(4). – PP. 287–295. Q2.

10. Makarov, P.V. Rock Mass as a Nonlinear Dynamic System. Mathematical Modeling of Stress-Strain State Evolution in the Rock Mass around a Mine Opening / P.V. Makarov, M.O. Eremin // *Physical Mesomechanics*. – 2018. – Vol. 21 (4). – PP. 283 – 296. Q2.

11. Smolin, I.Yu. Blow-up Modes in Fracture of Rock Samples and Earth's Crust Elements / I.Yu. Smolin, P.V. Makarov, A.S. Kulkov, M.O. Eremin, R.A. Bakeev // *Physical Mesomechanics*. – 2018. – Vol. 21 (4). – PP. 297 – 304. Q2.

12. Eremin M.O. Numerical simulation of fracture of ZrO_2 - Al_2O_3 ceramic composites / M.O. Eremin // *Physical Mesomechanics*. – 2016. – Vol. 19 (4). – PP. 452–458. Q2.

13. Makarov, P.V. Jerky flow model as a basis for research in deformation instabilities / P.V. Makarov, M.O. Eremin // *Physical Mesomechanics*. – 2014. – Vol. 17 (1). – PP. 62–80. Q2.

14. Makarov, P.V. Prefracture time of gabbro specimens in a damage accumulation model / P.V. Makarov, M.O. Eremin, Yu.A. Kostandov // *Physical Mesomechanics*. – 2014. – Vol. 17 (3). – PP. 199-203. Q2.

15. Makarov, P.V. Fracture model of brittle and quasibrittle materials and geomedia / P.V. Makarov, M.O. Eremin // *Physical Mesomechanics*. – 2013. – Vol. 16 (3). – PP. 207–226. Q2.

16. Makarov P.V. The numerical simulation of ceramic composites failure at axial compression / P.V. Makarov, M.O. Eremin // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2013. – Vol 24 (Special issue: Russian Fracture Mechanics School). – PP. 127-137. Q2.

17. Kostandov Yu.A. Fracture of compressed brittle bodies with a crack / Yu.A. Kostandov, P.V. Makarov, M.O. Eremin, I.Yu. Smolin, I.E. Shipovskii // *International Applied Mechanics*. – 2013. – Vol. 49 (1). – PP. 95–101. Q3.

В журналах, входящих в список ВАК

18. Евтушенко, Е.П. Моделирование разрушения хрупких и квази-хрупких тел и геосред / Е.П. Евтушенко, М.О. Еремин, Ю.А. Костандов, П.В. Макаров, И.Ю. Смолин, И.Е. Шиповский // Физическая мезомеханика. – 2012. – т. 15 (3). – СС. 35-44.

19. Смолин, И.Ю. Численное моделирование механического поведения модельных хрупких пористых материалов на мезоуровне / И.Ю. Смолин, М.О. Еремин, П.В. Макаров, С.П. Буякова, С.Н. Кульков, Е.П. Евтушенко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 5(25). – СС. 78–90.

20. Макаров, П.В. Моделирование разрушения керамических композиционных материалов при одноосном сжатии / П.В. Макаров, М.О. Еремин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 1. – СС. 61-74.

21. Смолин, И.Ю. Численное изучение особенностей формирования разломов сдвигового типа в геосреде / И.Ю. Смолин, П.В. Макаров, М.О. Еремин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – т. 56 (7/3). – СС. 215–217.

22. Макаров, П.В. Численное моделирование разрушения хрупких и квазихрупких материалов и сред / П.В. Макаров, М.О. Еремин, А.Ю. Перышкин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – т. 56 (7/3). – СС. 74-76.

23. Еремин, М.О. Численная оценка вязкости разрушения гетеромодульной керамики на основе карбида циркония при одноосном сжатии / М.О. Еремин, А.А. Пажин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2022. – т. 65 (4). – СС. 25-31.

24. Макаров, П.В. Явление прерывистой текучести как базовая модель исследования неустойчивостей деформационных процессов / П.В. Макаров, М.О. Еремин // Физическая мезомеханика. – 2013. – т. 16 (4). – СС. 109-128.

25. Еремин М.О. Применение метода механической аналогии для численного моделирования разрушения керамических композитов $ZrO_2 - Al_2O_3$ в трехмерной постановке / М.О. Еремин // Физическая мезомеханика. – 2015. – т. 18 (3). – СС. 105-112.

26. Макаров П.В. Горный массив как нелинейная динамическая система. Математическое моделирование эволюции напряженно-деформированного состояния горного массива в окрестностях выработки / П.В. Макаров, М.О. Еремин // Физическая мезомеханика. – 2016. – т. 19 (6), с. 62-76.

27. Смолин И.Ю. Режимы с обострением при разрушении образцов горных пород и элементов земной коры / И.Ю. Смолин, П.В. Макаров, А.С. Кульков, М.О. Еремин, Р.А. Бакеев // Физическая мезомеханика. – 2016. – т. 19 (6). – СС. 77-85.

28. Еремин М.О. Математическое моделирование эволюции напряжённо-деформированного состояния горного массива в окрестностях выработки. Оценка шагов генерального обрушения кровли при различной мощности основной кровли / М.О. Еремин, П.В. Макаров // Физическая мезомеханика. – 2018. – т. 21 (2). – СС. 80-88.

Монография

29. Макаров П.В., Евтушенко Е.П., Еремин М.О. Эволюция напряженно-деформированного состояния горного массива с выработками. Математическое моделирование / П.В. Макаров, Е.П. Евтушенко, М.О. Еремин. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 184 с.